Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak 2003/2004. őszi félév, Szász Domokos

11. feladatsor
A normalis eloszlás (egy- és többdimenziós)

Memo:

Az egy dimenziós normális eloszlás, $N(m,\sigma)$, sűrűségfüggvénye

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\big(-(x-m)^2/(2\sigma^2)\big).$$

A paraméterek jelentése: $m \in \mathbb{R}$ a várható érték, $\sigma > 0$ a szórásnégyzet. (Ellenőrízzék!) A standard választás: $m = 0$, $\sigma = 1$.

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \sigma^{-1}\varphi(\sigma^{-1}(x-m)),$$

ahol $\varphi(x) := \varphi_{0,1}(x)$. A (kumulált) eloszlásfüggvény:

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{m,\sigma}(y)dy = \Phi((x-m)/\sigma),$$

ahol $\Phi := \Phi_{0,1}$ a standard normális eloszlásfüggvény. A standard normális sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény számszerű értékei a mellékelt táblázatból olvashatóak ki.

Az n dimenziós normális eloszlás: legyen $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)^T \in \mathbb{R}^n$ n-dimenziós valós vektor és $\mathbf{C} = \big(c_{i,j}\big)_{i,j=1}^{n}$ $n \times n$ méretű négyzetes, valós, szimmetrikus, pozitív definit mátrix. Az n dimenziós nem elfajult normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$\varphi_{\mathbf{m},\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}}} \exp\big(-(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})/2\big).$$

A paraméterek jelentése: $\mathbf{m}$ a várható érték vektor, $\mathbf{C}$ a kovariancia mátrix. (Ellenőrízzék!) Standard paraméter választás: $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$

$$\varphi_{\mathbf{m},\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = (\det \mathbf{C})^{-1/2}\varphi(\mathbf{C}^{-1/2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})),$$

ahol $\varphi := \varphi_{\mathbf{0},\mathbf{I}}$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

Alapigazságok:

(1) Együttesen normális elozlású valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.

(2) Több valószínűségi változó akkor és csak akkor együttesen normális eloszlású, ha tetszőleges lineáris kombinációi normális eloszlásúak. A lineáris kombinációk (együttes) eloszlásának paramétereit (várható érték, szórásnégyzet, kovariancia) nyilvánvaló módon számoljuk.

(3) Együttesen normális eloszlású valószínűségi változók feltételes eloszlása, tetszőleges lineáris kombinációkkal megadott feltételek mellett, szintén normális. De ezt órán nem bizonyítottuk ...

11.1 Legyen X $N(0,1)$ (azaz: standard normális) eloszlású valószínűségi változó. Az alábbi valószínűségpárok közül melyik a nagyobb?
(a) $p_1 = \mathbf{P}(|X| \le 0.7)$, $p_2 = \mathbf{P}(|X| \ge 0.7)$.
(b) $q_1 = \mathbf{P}(-0.5 \le X \le -0.1)$, $q_2 = \mathbf{P}(1 \le X \le 2)$.

11.2 Tudva, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$, számoljuk ki a következő integrált

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)dx$$

ahol a valós és pozitív, b és c pedig tetszőleges valós (vagy komplex) konstansok.

- 11.3 Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált "abszolút momentumait":

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k dy, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Útmutatás: Páros $k = 2l$-re számoljuk ki és használjuk a köv. kifejezést:

$$\frac{d^l}{d\lambda^l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} dy \bigg|_{\lambda=1}.$$

Páratlan $k = 2l + 1$-re hajtsuk végre a $z = y^2$ változócserét az A_k-t definiáló integrálban.

11.4 Ellenőrízzük a következő két hatványsorfejtés érvényességét és mutassuk ki, hogy konvergencia sugaruk végtelen:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)! 2^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1};$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{8 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \ldots \right).$$

11.5 Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) \quad < \quad \mathbf{P}(X > x) \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}.$$

Útmutatás: Differenciáljuk az egyenlőtlenség-lánc mindhárom tagját és hasonlítsuk össze a deriváltakat.

- 11.6 Legyen X $N(m, \sigma)$ eloszlású valószínűségi változó.
(a) Határozzuk meg az $Y := X^2$ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét, $m = 0$ esetben.
(b) Határozzuk meg a $Z := \exp(X)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ esetén. Számoljuk ki $\mathbf{E}(Z)$-t és $\mathbf{D}^2(Z)$-t. (*Megjegyzés:* a (b) esetben az u.n. log-normális eloszlásról van szó.)

11.7 Emberek egy bizonyos csoportjának az átlagos testsúlya m kg, a testsúlyok szórása pedig 3 kg. $m = 60$ ill. $m = 10$ esetén határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testsúlya az átlagtól nem tér el 5 kg-nál többel, ha
(a) a testsúly normális eloszlású;
(b) a testsúly log-normális eloszlású;

- 11.8 Legyen X valószínűségi változó $N(0, 1)$ (azaz standard normális) eloszlású. Határozzuk meg a következő várható értékeket és szórásnégyzeteket:
(a) $\mathbf{E}(X \cos(X))$, $\mathbf{E}(X/(1 + X^2))$, $\mathbf{E}(\sin(X))$;
(b) $\mathbf{E}(\cos(X))$, $\mathbf{D}^2(\cos(X))$, $\mathbf{D}^2(\sin(X))$.

- 11.9 Az X és Y valószínűségi változók függetlenek és azonos $N(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk az $U := X + Y$ és $V := X - Y$ valószínűségi változókat. Függetlenek lesznek-e egymástól U és V?

11.10 Legyen X $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó és $Y := \text{sign}(1 - |X|) \cdot X$.
(a) Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlását.
(b) $Z := X + Y$ eloszlása normális-e?

11.11 Legyenek X és Y független és azonos $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a

$$Z := e^{(X^2+Y^2)/2}(1 + X^2 + Y^2)^{-3/2}$$

valószínűségi változó várható értékét és szórását.

• 11.12 Legyenek X és Y független $N(0,1)$. illetve $N(0,2)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái $(X;Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:
(a) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$,
(b) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 2\}$,
(c) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$,
(d) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 0, |x| \leq 1, y \geq -2\}$,
(e) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \leq 1\}$,
(f) $M \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y^2/4) \leq c^2\}$.

11.13 Egy folyó feletti híd téglalap alakú, melynek koordinátái Descartes féle koordináta rendszerben eleget tesznek a következő feltételeknek: $|x| \leq 10$, $|y| \leq 100$ (valamilyen hossz-egységekben). Tűzérségi támadás esetén a lövedék beesésének $(X;Y)$ pontja (ugyanabban a koordináta rendszerben), kétdimenziós normális eloszlású, független komponensekkel és $\sigma_X = 10$, $\sigma_Y = 40$ szórásokkal. Az $(\mathbf{E}(X); \mathbf{E}(Y))$ koordinátájú pontot "célpont"-nak nevezzük. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a lövedék eltalálja a hidat, ha a célpont:
(a) $(0,0)$, (b) $(10,0)$, (c) $(5,20)$.

11.14 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X,Y) koordinátájú véletlen pont a $(0;3), (4;0), (1.8;5.4), (5.8;2.4)$ csúcsú téglalapba esik.

11.15 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X,Y) koordinátájú véletlen pont az ABC háromszögbe essék, a következő esetekben:
(a) $A = (0;0)$, $B = (1;1)$, $C = (2;0)$.
(b) $A = (0;2)$, $B = (2;1)$, $C = (2;2)$.
(c) $A = (2;0)$, $B = (1;1)$, $C = (1;2)$.
Útmutatás: Használjunk szimmetriákat!

11.16 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg az $(X;Y)$ Descartes-koordinátájú pont $(R;\Theta)$ *polárkoordinátáinak* együttes eloszlását.

11.17 Legyen $(X;Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $(X;Y)$ koordinátájú véletlen pont beleesik az
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$ körgyűrűbe;
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \min(|x|,|y|) \leq \max(|x|,|y|) \leq 3\}$ tartományba;
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq |x| + |y| \leq 3\}$ tartományba.

11.18 Az $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása nemelfajult két dimenziós normális eloszlás $\vec{0} = (0,0)$ várható értékkel és $\left(\sigma_{i,j}\right)_{i,j=1}^{2}$ kovariancia mátrixszal ($\sigma_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1}$, $\sigma_{1,1} > 0$, $\sigma_{2,2} > 0$, $\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} - \sigma_{1,2}\sigma_{2,1} > 0$). Számítsuk ki a következő valószínűségeket:
(a) $p_{00} = \mathbf{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$;
(b) $p_{01} = \mathbf{P}(X \geq 0, Y \leq 0)$;
(c) $p_{10} = \mathbf{P}(X \leq 0, Y \geq 0)$;
(d) $p_{10} = \mathbf{P}(X \leq 0, Y \leq 0)$.

11.19 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg k-nak azt a minimális értékét, amelyre
$\mathbf{P}(\max(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_k|) \geq 2) \geq 1/2$.

11.20 Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?