

SZAKDOLGOZAT

Számítógépes szimulációk megbízhatósága

Sepsi Róbert

Témavezető: Tóth Imre Péter

tudományos munkatárs

BME Matematika Intézet,

Sztochasztika Tanszék

BME

2009

Tartalomjegyzék

| | |
|---|-----------|
| 1. Bevezetés | 3 |
| 1.1. Alapfogalmak | 4 |
| 1.2. Tesztelt dinamikai rendszerek | 6 |
| 1.2.1. Gauss-leképezés | 6 |
| 1.2.2. $2x \pmod{1}$, $10x \pmod{1}$ | 7 |
| 1.2.3. CAT - Continuous Automorphism of the Torus | 8 |
| 2. Fázistér - a diszkretizáció problémája | 9 |
| 3. Invariáns mérték szimulálása, numerikus modell hisztogramja | 10 |
| 3.1. Az invariáns mérték sűrűségfüggvénye és a „tökéletes hisztogram” | 11 |
| 3.2. Elméleti hibák nagyságai | 16 |
| 4. Numerikus modellek kerekítésének módszerei | 20 |
| 4.1. Szokásos kerekítési módszer | 21 |
| 4.1.1. $\{2x\}$, $\{10x\}$ | 21 |
| 4.1.2. Gauss-leképezés | 22 |
| 4.1.3. CAT - leképezés | 22 |
| 4.1.4. Eredmények szokásos kerekítéssel | 22 |
| 4.2. Randomizálás és „okos” randomizálás | 24 |
| 4.2.1. Eredmények „buta” és „okos” randomizálásokra | 25 |
| 5. Ergodicitás megtartása | 27 |
| 6. Konklúzió | 30 |
| 7. Függelék | 32 |

1. Bevezetés

A dolgozat célja számítógépes szimulációk megbízhatóságának megfigyelése. Ennek motivációját az adja, hogy a legtöbb tudományterület kutatásainál a gyakran előforduló bonyolult folyamatok valós modellje helyett a kutatók kénytelenek numerikus modellre áttérni, és ezek számítógépes vizsgálatából vonnak le következtetéseket a valódi modellre vonatkozóan.

Ennek az óriási problémakörnek egy kicsiny szeletére koncentrálnak. A témát olyan *determinisztikus* dinamikai rendszerekre vizsgáltuk, melyeknél fellép valamilyen instabilitás, vagy tágítás. A vizsgált rendszerek többsége hiperbolikus. Ennek két komoly oka is van.

Először, az ilyen rendszerek numerikus szimulációját különösen izgamassá teszi az a tény, hogy a számolás során elkerülhetetlen kis numerikus hiba gyorsan felnő, lehetetlenné téve a rendszer tényleges sorsának nyomon követését. Felvetődik emiatt a kérdés, hogy a modell szimulációjának mekkora köze van a valós modell tényleges tulajdonságaihoz. Meglepő módon mégis gyakran lehet a szimulációkból helyes – vagy legalábbis hihető – következtetéseket levonni bizonyos, statisztikus jellegű kérdésekre vonatkozóan. Vagyis annak ellenére, hogy az egyes kezdőállapotokból indított rendszer sorsát nem ismerhetjük meg, esély van arra, hogy a szimuláció során látott „pszeudo-trajektória” valamilyen értelemben „tipikus” viselkedést mutat.

Természetes tehát, hogy az általunk vizsgált determinisztikus rendszerekre néhány statisztikus tulajdonságot szeretnénk a szimulációból megismerni. A kézenfekvő első lépés az invariáns mérték vizsgálata, mert ennek ismerete előfeltétel a további, erősebb statisztikus tulajdonságok - mint pl. ergodicitás, keverés, keverési sebesség (korrelációlecsengés) vizsgálatához.

Ez szolgáltatja a másik fő szempontot a modellek megválasztásához. Olyan rendszereket igyekszünk nézni, ahol az invariáns mérték stabil a paraméterek kis perturbációival szemben, vagyis nem az történik, hogy az adatok digitális ábrázolásából adódó hiba már önmagában egy teljesen más viselkedésű rendszert eredményez egy teljesen más invariáns mértékkel. Érdekes módon a hiperbolicitás a pályák instabilitása mellett éppen a statisztikus tulajdonságok stabilitását eredményezi [3, 4].

A dinamikai rendszerek elméletében megszokott, hogy rengeteg invariáns mérték van.

Ezek közül az esetleges *abszolút folytonos* invariáns mértékek a fizikailag érdekesek, így a szimulációk is ezek vizsgálatára koncentrálnak. A vizsgált modellek választásánál ügyeltünk arra, hogy abszolút folytonos invariáns mérték létezzen – bár a módszerek alkalmazhatósága szempontjából ez nem kulcsfontosságú.

A szakirodalomban több módszer és javaslat is ismert az invariáns mérték meghatározására. A problémát először Ulam [8] vetette fel, s már akkor javasolt is módszert az invariáns mérték meghatározására – amennyiben pontosan tudnánk számolni. A közelmúltban [6] fogalmazott meg konkrét kérdéseket szakaszonként tágító leképezésekkel kapcsolatban, egyes speciális esetekre pedig [1] adott választ. Ennek a dolgozatnak nem célja ezen módszerek áttekintése. Csupán a gyakorlatban legtöbbször alkalmazott, legkönnyebben programozható eljárásra koncentrálnunk, amikor egy hosszú trajektória megfigyeléséből vonunk le statisztikus következtetéseket.

Régóta ismert, hogy a statisztikus tulajdonságok szimulációjának stabilitását javíthatja véletlen perturbációk bevezetése. Ennek a dolgozatnak fő célja, hogy a [1]-ben javasolt „mikro-perturbációk” módszere által adott eredményeket összevesse a legegyszerűbb módszerek (pl. amikor csak kerekítés történik) által adott eredményekkel, olyan dinamikai rendszerek esetén, amikre a [1]-ben tárgyalt szigorú eredmények nem terjednek ki.

1.1. Alapfogalmak

A témában használt módszereink, illetve elért eredményeink megértéséhez fontos látnunk a következő alapvető definíciókat és tételt. Ezek háttérül [7] szolgált.

1. Definíció (σ -algebra, mérhető tér, valószínűségi mező). *Ha M tetszőleges nem-üres halmaz, akkor M részhalmazainak egy \mathcal{F} családját σ -algebrának nevezzük, ha*

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(ii) \quad \forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

$$(iii) \quad \text{Ha } A \in \mathcal{F}, \text{ akkor } \bar{A} \in \mathcal{F}$$

A $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt mértéknek nevezzük, ha tetszőleges $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ ($n \neq m$) esetén $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. A μ mérték valószínűségi,

ha $\mu(M) = 1$. Az (M, \mathcal{F}) pár neve mérhető tér, az (M, \mathcal{F}, μ) hármasé mértéktér (illetve valószínűségi mező, ha μ valószínűségi mérték.)

2. Definíció (Dinamikai rendszer, fázistér). Egy dinamikai rendszert egy M sokaság, és egy sima f^t függvény alkotja, amely bármely $t \in T$ időpontban a fázisteret önmagára képezi. A T halmaz többféleképpen választható, mi a továbbiakban T alatt az egész számok halmazát fogjuk érteni. A dinamikai rendszer minden egyes lehetséges állapota M egy elemének feleltethető meg, M -et a rendszer fázisterének vagy állapotterének nevezzük.

3. Definíció (Endomorfizmus). Legyen (M, \mathcal{F}) mérhető tér, azaz M az alaphalmaz, dinamikai rendszerünk fázistere, és \mathcal{F} M részhalmazainak σ -algebrája. Az (M, \mathcal{F}, f) hármas, ahol $f: M \rightarrow M$, endomorfizmusnak nevezzük, ha f mérhető, azaz $\forall A \in \mathcal{F}$ -re $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Sok dinamikai rendszernek a matematikai megközelítés számára igen előnyös tulajdonsága van: megadható a fázisterén olyan mérték, melyet a dinamika invariánsan hagy. Formálisan ezt a következőképp írhatjuk le:

4. Definíció (Invariáns mérték). Legyen (M, \mathcal{F}) mérhető tér. A rajta megadott μ mértéket a 3. definíció értelmében vett f endomorfizmus invariánsan hagy, ha $\forall A \in \mathcal{F}$ -re $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. (Az (M, \mathcal{F}, μ, f) négyest ugyancsak endomorfizmusnak nevezzük.)

Továbbiakban feltesszük minden M fázistérre, hogy \mathcal{F} a részhalmazainak σ -algebrája, és minden szóbjövő halmazra feltesszük, hogy ennek eleme.

5. Definíció (Invariáns halmaz). Adott (M, μ, f) endomorfizmus. $A \subset M$ halmaz invariáns (μ, f) -el, ha $\mu(A \circ f^{-1}(A)) = 0$. (Ahol \circ a szimmetrikus differenciát jelöli.)

Megj.

- Ha A invariáns $\Rightarrow \mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, de anélkül is, mert μ invariáns.
- Ugyanakkor $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \not\Rightarrow A$ invariáns!

6. Definíció (Ergodicitás). Adott (M, μ, f) endomorfizmus. Ekkor a μ invariáns mérték ergodikus f -re, ha bármely A invariáns halmaz triviális. (Vagy másképp, ha $\forall A \subset M$ -re ha $\mu(A \circ f^{-1}(A)) = 0$, akkor $\mu(A) = 0$ vagy 1 .)

7. Definíció (Sokaságátlag, időátlag). Adott (M, μ, f) endomorfizmus. Legyen $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ és integrálható μ szerint (ún. „megfigyelhető mennyiség”). Ekkor

- Sokaságátlag: $\int_M h d\mu$, azaz h val.változó μ szerinti várható értéke (μ invariáns mérték)
- Időátlag: $\bar{h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h+h(f)+h(f^2)+\dots+h(f^k)}{k}$

1. Tétel (Birkhoff féle ergodtétel). (M, μ, f) endomorfizmus. Ha μ invariáns mérték ergodikus, akkor μ -m.m. x -re az időátlag létezik, és időátlag = sokaságátlag.

Megj.

- A dolgozat témája, célja nem az, hogy bizonyítsuk adott dinamikai rendszerek abszolút folytonos ergodikus invariáns mértékének létezését, hiszen ez nehéz és máig tisztázatlan kérdés. Ezzel szemben, hogy megmutassuk, szimuláljuk azt akkor, ha létezik! Ezért a következőkben minden vizsgált dinamikai rendszerre feltesszük, hogy létezik ergodikus invariáns mértéke, és annak előállítása már úgy adódik, hogy tényként kezeljük a fenti tétel eredményét (azaz, hogy időátlag = sokaságátlag). Később részletesen látni fogjuk, hogy miként!

1.2. Tesztelt dinamikai rendszerek

8. Definíció (Intervallumleképezések). Legyen $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -függvény, amelyre az $f(x) := \{h(x)\} = h(x) \pmod{1}$ módon értelmezett $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ endomorfizmus végesen invertálható (azaz $\forall y \in [0, 1]$ -re az $f(x) = y$ egyenletnek véges sok megoldása van). Az így bevezetett leképezéseket nevezzük intervallumleképezéseknek.

A dolgozat témája szempontjából az teszi ezeket a leképezéseket érdekessé, hogy matemaikai és számítógépes tanulmányozásuk is könnyű, hiszen a lehető legalacsonyabb dimenziósak, ugyanakkor már ezek is érdekes viselkedést mutatnak sok esetben.

1.2.1. Gauss-leképezés

Legyen a $[0, 1)$ egységintervallumon értelmezett f függvény a következő:

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$$

ahol $\{x\} = x - [x]$, az x szám törtrésze.

1. Állítás. *A Gauss-leképezésnek van sima invariáns mértéke, melynek sűrűségfüggvénye*

$$\rho(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2} \quad (1)$$

1. Bizonyítás. *Ha van invariáns mérték, akkor az $I := (y, y + dy)$ intervallum mértéke egyrészt $\mu(I) = \rho(y)dy$, másrészt mivel μ invariáns mérték, ezért*

$$\mu(I) = \mu(f^{-1}(I)) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - dx_k, x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) |dx_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2 dy$$

ahol $x_k := \frac{1}{k+y} : 1 \leq k$ az $y = f(x)$ egyenlet megoldásai, és abból pedig következik, hogy $dx_k = \frac{-1}{(k+y)^2}$. Innen pedig

$$\rho(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho\left(\frac{1}{k+y}\right) \frac{1}{(k+y)^2} \quad (2)$$

Tegyük fel, hogy a keresett sűrűségfüggvény (1). Ekkor az egyenlet jobb oldala a következő lesz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k+y}\right)} \frac{1}{(k+y)^2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+y}{(1+k+y)} \frac{1}{(k+y)^2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+y+1)(k+y)}$$

Azonban a \sum egy teleszkópikus sorrá alakítható át, s így

$$\frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+y} - \frac{1}{k+y+1} \right) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{(1+y)} = \rho(y)$$

Azaz a feltételezett (1) kiegyenlíti (2) bal oldalát is!

1.2.2. $2x \pmod{1}$, $10x \pmod{1}$

A következő intervallumleképezéseket szimuláltuk még 1 dimenzióban:

$$f(x) = \{2x\}, f(x) = \{10x\} \quad x \in [0, 1).$$

Az invariáns mértéke mindkettőnek a Lebesgue-mérték. A hozzá tartozó sűrűségfüggvény pedig

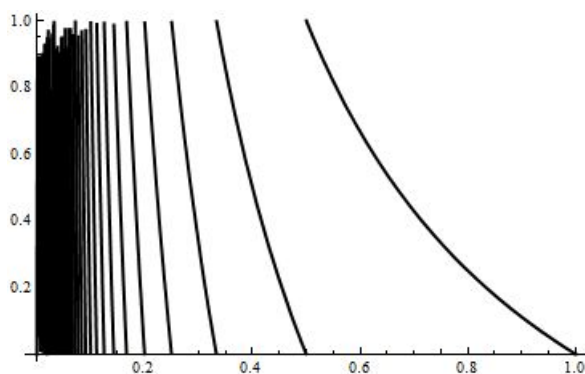
$$\rho(x) \equiv 1 \quad x \in [0, 1).$$

1.2.3. CAT - Continuous Automorphism of the Torus

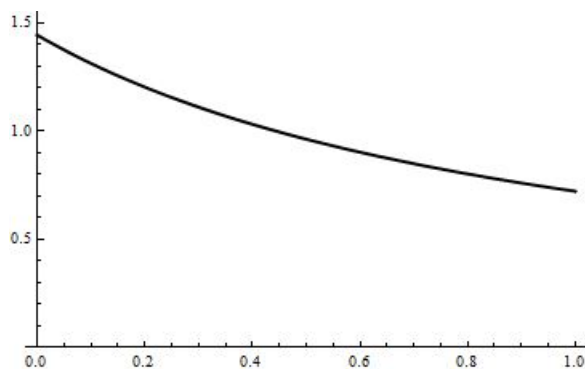
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}$$

$(x, y) \in [0, 1]^2$. Invariáns mértéke a Lebesgue-mérték.

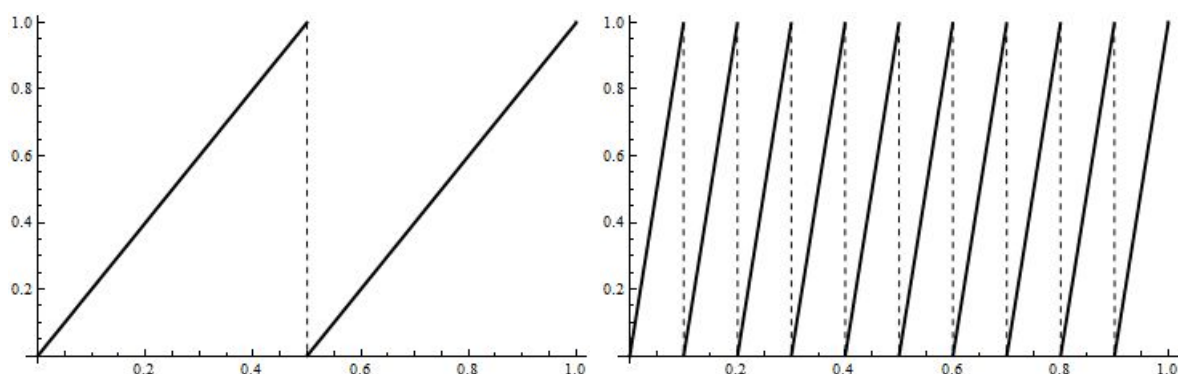
A vizsgált rendszerek tulajdonságai miatt a továbbiakban, ha mást nem mondunk M fázistér alatt $[0, 1)$ -et vagy $[0, 1)^2$ -t értjük.



1. ábra. Gauss-leképezés



2. ábra. A Gauss-leképezés invariáns mértékének sűrűségfüggvénye



3. ábra. $\{2x\}$ illetve $\{10x\}$

2. Fázistér - a diszkretizáció problémája

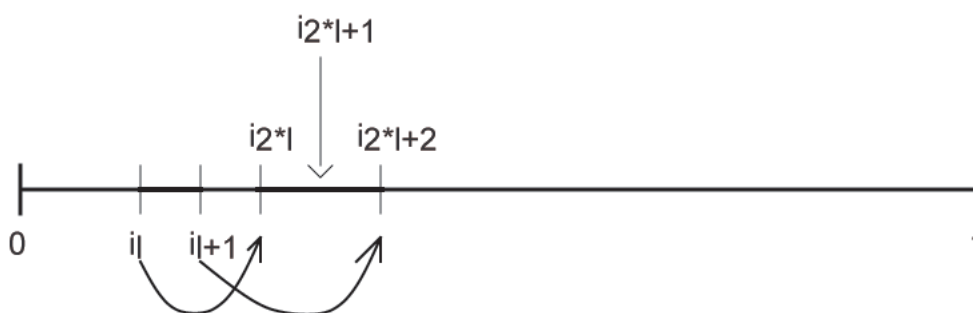
A dinamikai rendszerekkel való foglalkozáshoz elengedhetetlen a legtöbb esetben számítógépes szimuláció, numerikus számítás. Azonban bármennyire is megkönnyíti munkánkat a számítások, szimulációk számítógépre való átültetése, bizonyos árat kell fizetnünk ezért. Ez pedig az, hogy a mi dinamikai rendszereinkre jellemző folytonos fázisteret, ahol a dinamika még invertálható, kénytelenek vagyunk leváltani egy diszkrét fázistérre, hiszen természetes, hogy nem lehet folytonos a dinamikai rendszereinkhez megadott $[0, 1)$ vagy $[0, 1]^2$ fázisterek a numerikus modellben, azonban a diszkrét értelmezési tartományon ezek a dinamikák már nem lesznek szürjektívek.

Első közelítésre talán nem látszik ennek jelentősége, hiszen bízhatunk a gépi pontosságban, de az általunk vizsgált rendszerekre jellemző kaotikusság (azaz, hogy valamiféle tágítás történik) miatt egy-egy kisebb hiba a dinamika sokszori iterálása következtében jelentősen megnőhet. Ez azért jelent nagy gondot számunkra, mert az adott dinamikai rendszer általunk keresett invariáns mértékének sűrűségfüggvényét a szimuláció során a fázistér egy adott kezdőpontjának a dinamika iterációjával kapott trajektóriájával fogjuk előállítani (részletesebben a 3.1-ben). A tágító tulajdonság miatt pedig ennek a trajektóriának – akár csak közelítően pontos – nyomonkövetése általában reménytelen.

Külön figyelmet kell ezért fordítani a szimuláció során használt kerekítés módszereire. Mi az egyszerűség kedvéért a fázisteret ezentúl N darab egybevágó részre osztjuk. Már az $f(x) = \{2x\}$ függvény esetében is észrevehetjük, hogy az N egyenlő részre felosztott (diszkretizált) fázistér két egymást követő i_l és i_{l+1} ($i_l, i_{l+1} < \frac{1}{2}$) pontjára alkalmazva f -et

$f(i_l) = i_{2l}$ és $f(i_{l+1}) = i_{2l+2}$ között kimarad $\frac{2}{N}$ mértékű folytonos ponthalmaz (ha N részre osztottuk a $[0, 1)$ -et), de a diszkrétizált fázistérnek is 1 pontja (i_{2l+1}) „kiesik” az iterálás után attól függően, hogy előtte merre kerekítettünk.

Szimulációinkban használt kerekítési módszerekkel ennek a problémának a kiküszöbölésére törekszünk.



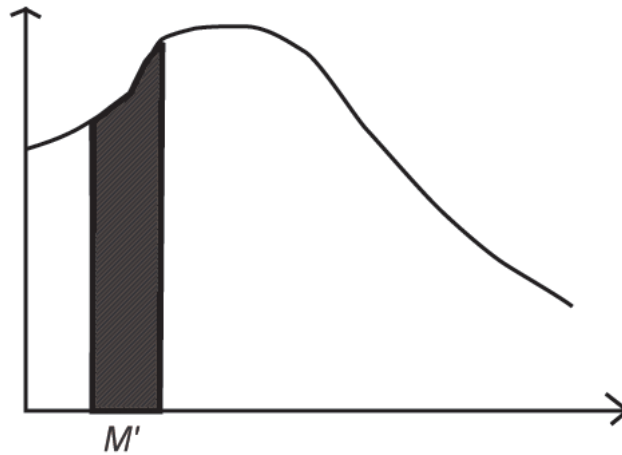
4. ábra. A diszkrétizáció problémája

3. Invariáns mérték szimulálása, numerikus modell hisztogramja

Az 1.1. végén már kifejtettük, hogy a vizsgált dinamikai rendszerekre már úgy tekintünk, hogy feltételezzük az ergodikus invariáns mértékének létezését. Mindezt azért tesszük, mert így Birkhoff ergodtétéle alapján kijelenthetjük, hogy μ -m.m. x -re a sokaságtlag = időátlag, vagyis

$$\int_M h d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h + h(f) + h(f^2) + \dots + h(f^k)}{k} \quad (3)$$

Ez azért fontos, mert (3) bal oldalát megnézve látható, hogy $h := \mathbf{1}_{M'}$ (ahol $M' \subseteq M$) választása esetén az időátlag ismerete mellett megmondható $\mu(M')$, vagy az invariáns mérték sűrűségfüggvényének M' feletti integrálja. Számunkra azért jelentős a tétel, mert általa olyan számítással konvergálhatunk ezekhez a „területekhez”, ami numerikusan könnyen kezelhető. (Az időátlagok definíciójában szereplő iterációk számítására gondolunk itt.)



5. ábra. h -val előállított terület M' fölött

3.1. Az invariáns mérték sűrűségfüggvénye és a „tökéletes hisztogram”

A diszkretizáció problémája itt is előjön, hiszen egy diszkrét értelmezési tartomány felett esélytelen a folytonos sűrűségfüggvényt pontosan előállítani. Azonban mivel sűrűségfüggvényről van szó, létezik olyan hisztogram (vagy speciális lépcsős függvény), ami jól közelíti ezt a folytonos leképezést. Ha a fejezet bevezetésében lévő M' -ket úgy választjuk, hogy M előáll azok diszjunkt uniójaként (azaz $M = \dot{\cup} M'$), akkor az ott említett területek (közelítőleges) ismeretében könnyen előállítható az adott M' partíció feletti konstans függvény értéke, és azok ismeretében pedig a sűrűségfüggvényt közelítő lépcsős függvény.

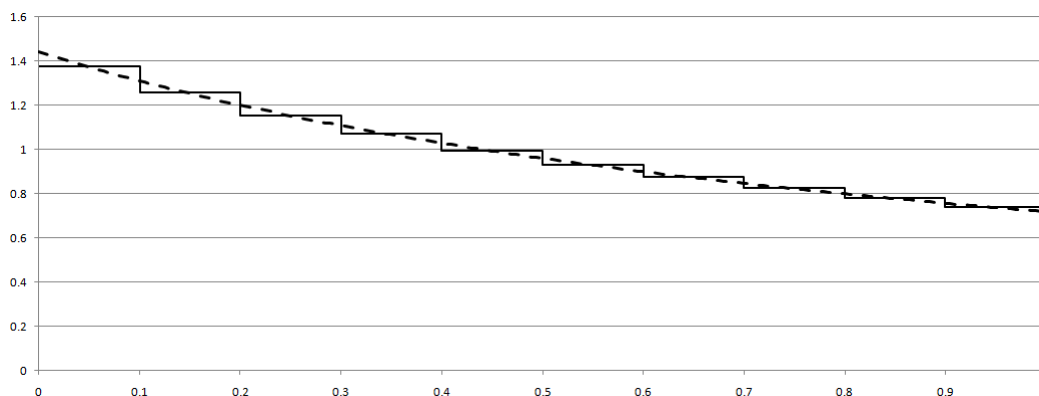
Az egyszerűség kedvéért mi a fázisteret W egyenlő részre fogjuk a továbbiakban felosztani. (Fontos látni, hogy két különböző felosztásról fogunk a következőkben beszélni, az egyik már tárgyalt numerikus modellre való átültetésből eredő fázistér diszkretizációja (N egyenlő részre osztjuk), a másik pedig az itt említett lépcsős függvény előállításához használt felosztás (W).)

A szimuláció leírása előtt definiáljunk egy olyan lépcsős függvényt, mely egyrészt hisztogram, másrészt a hozzá tartozó felosztás mellett a legpontosabban illeszkedik a sűrűségfüggvényre.

9. Definíció (Partíció feletti hisztogram). W elemű partíció feletti hisztogramnak nevez-

zük azt a nemnegatív, partíció elemenként konstans („lépcsős”) G^W függvényt, amire teljesül, hogy $\int G^W = 1$

10. Definíció (Tökéletes hisztogram). Legyen $\{I_l\}_{l=1}^W$ egy partíciója egy tartománynak (pl. a fázistérnek). ρ a tartomány feletti sűrűségfüggvény. Egy ilyen W elemű partíció feletti H^W hisztogramot tökéletes hisztogramnak hívunk, ha $\forall l$ -re $\int_{I_l} H^W = \int_{I_l} \rho$.



6. ábra. Tökéletes hisztogram a Gauss-fv. invariáns sűrűségfüggvényére $W = 10$

A „tökéletes hisztogramnak” fontos szerepe van, mert az invariáns mértéket szimuláló hisztogramunk ehhez fog tartani (pontonként) a valós modellben, és ennek tudatában fogjuk tudni számolni azt a hibát, amivel a numerikus modellben kapott hisztogram eltérhet ahhoz, hogy megbízhatónak jelentsük ki.

Hogy ezt jobban lássuk, vizsgáljuk meg a majdani numerikus szimulációhoz használt eljárás elméleti részét. (Egyszerűség kedvéért az 1 dimenziós módszerrel foglalkozunk, de az analóg módon átültethető 2 dimenziós esetre is.)

- Először is definiáljuk a következő $h_l : M \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket:

$$h_l(x) := \mathbf{1}_{\left[\frac{l-1}{W}, \frac{l}{W}\right)}, (l = 1, \dots, W)$$

Következik ebből, hogy $\sum_l h_l(x) \equiv \mathbf{1}_{[0,1)}$

- Vegyük a fázistér egy pontját (x_0 -t) véletlenszerűen
- Hattassuk rá a dinamikát k -szor, azaz megkapjuk $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^k(x_0)$ -ket

- $h_l(x)$ függvényekkel képezzük $g_{l,k} := h_l(f(x_0)) + h_l(f^2(x_0)) + \dots + h_l(f^k(x_0))$ értéket $\forall l$ -re. $g_{l,k}$ gyakorlatilag az l . intervallum „találatainak” száma.
- Az egyenletes partíció $\{I_l\}_{l=1}^W$ elemeihez így rendelt $g_{l,k} = g^k(I_l)$ értékek lesznek a g_k^W lépcsős függvény értékei
- g^W -t megfelelően normálva kapjuk G_k^W hisztogramot (G_k^W nem a tökéletes-hisztogram lesz, de elméleti eltérése attól becsülhető lesz bizonyos feltevések mellett, lsd. később)

2. Állítás (g_k^W lépcsős függvény normálása egyenletes felosztás esetén). *A fent vázolt módszerrel, k iterációval kapott $[0, 1)$ intervallum $\{I_l\}_{l=1}^W$ egyenletes-partíciója feletti g_k^W lépcsős függvény kapcsolata a normált G_k^W hisztogrammal:*

$$\forall l : G_k^W(I_l) = \frac{W}{k} g_k^W(I_l)$$

2. Bizonyítás. *Az egyenletes felosztás $[0, 1)$ -en, és a normálás miatt a következők teljesülnek:*

$$\forall l : I_l = \left[\frac{l-1}{W}, \frac{l}{W} \right), G_k^W(I_l) = c g_k^W(I_l)$$

A 9. definíció és a lépcsős függvények integráljára vonatkozó tulajdonság miatt a következőnek is teljesülnie kell

$$1 = \int G_k^W = \sum_{l=1}^W G_k^W(I_l) |I_l| = \frac{1}{W} \sum_{l=1}^W G_k^W(I_l) = \frac{1}{W} c \sum_{l=1}^W g_k^W(I_l)$$

Azonban triviális, hogy $\sum_{l=1}^W g_k^W(I_l) = k$. Ezért

$$1 = c \frac{1}{W} k \implies c = \frac{W}{k}$$

3. Állítás. *A fent vázolt eljárással az előző állítás szerint normálva kapott G_k^W hisztogram μ -m.m. x -re pontonként tartani fog az invariáns mérték sűrűségfüggvényének H^W „tökéletes hisztogramjához”.*

3. Bizonyítás. *A fejezet bevezetésében tárgyaltak miatt, és (3) értelmében, tudjuk, hogy μ -m.m. x -re*

$$\forall l : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_l(f(x)) + \dots + h_l(f^k(x))}{k} = \int_M h_l(x) d\mu(x) \quad (4)$$

10. Definíció, $h_l(x)$ -ek definíciója, és M fázistér W egyenletes felosztása miatt (4) integráljára igaz lesz a következő

$$\int_M h_l(x) d\mu(x) = \int_{\frac{l-1}{W}}^{\frac{l}{W}} \rho(x) dx = \frac{1}{W} H^W(I_l) \quad (5)$$

Ahol $\rho(x)$ a μ invariáns mérték sűrűségfüggvénye, $H^W(I_l)$ pedig a „tökéletes-hisztogram” I_l intervallumrész feletti értéke. (4) és (5) miatt adódik, hogy

$$\forall l : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_l(f(x)) + \dots + h_l(f^k(x))}{k} = \frac{1}{W} H^W(I_l)$$

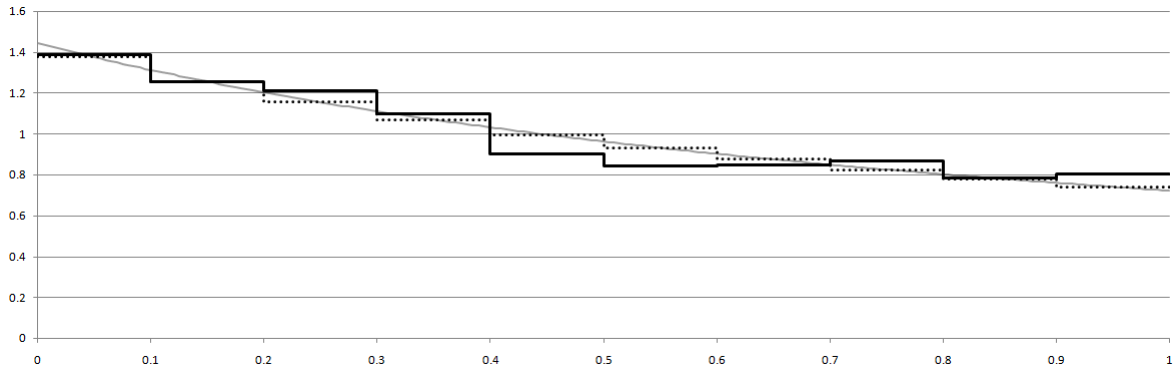
Ebből

$$\forall l : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W}{k} h_l(f(x)) + \dots + h_l(f^k(x)) = H^W(I_l)$$

Továbbá

$$\forall l : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W}{k} g_{l,k}^W = H^W(I_l)$$

Azaz $\frac{W}{k}$ -val való normálás esetén amennyiben $k \rightarrow \infty$, akkor $G_k^W \rightarrow H^W$.



7. ábra. A szimulációval előállított hisztogram a Gauss rendszer sűrűségfüggvényére. Pontozottan a tökéletes hisztogram, háttérben szürkével a s.f.v. ($W = 10$, $k = 2000$)

Megjegyzések

- A szimuláció eljárásában az x_0 kezdőpontot azért választjuk véletlenszerűen, mert Birkhoff tétele „csak” μ -m.m. lesz igaz, azaz arra törekszünk, hogy egy szabadon választott kezdőpont μ -tipikus legyen.

- Az eddig leírtakban a következő, továbbra is gyakran előforduló paraméterekkel ismerkedtünk meg:
 - N - a fázisteret a szimulációinkban (és az ehhez írt C nyelvű programban is) ennyi részre osztjuk fel a diszkretizáció jelölése képpen. A számítógépeken ez általában $\sim 2^{32}$ vagy 2^{64} .
 - W - a fázisteret a szimulációinkban ennyi részre osztjuk fel, hogy jó hisztogramot kapjunk (ami gyakorlatilag jellemzi a hozzá tartozó sűrűségfüggvényt). Általában W -t 100 – 10000 között választják a megfelelő pontosság miatt, mi a szemléletesség miatt inkább 25 – 1000-nek.
 - k - az iterációk száma, ennek emelésével pontosabb „tökéletes hisztogramot” kaphatunk, de a gépidő szab ennek korlátot, így k általában $\leq 10^8$.
- A leírt szimulációs eljárás, ha „hétköznapi” szemüveggel olvassuk, igazából egy k elemű mintából képezett G_k^W tapasztalati sűrűségfüggvény előállításáról szól, ami persze a mintaelemszám növelésével egyre jobban kell, hogy tartson pontonként a valódi sűrűségfüggvényhez, amiből a minták háttéreloszlása származik. E szemléletmód miatt kísérleteinkben szemelött tartottuk, hogy az iterációszám nagyságrendileg nagyobb legyen a hisztogram felosztásánál, azaz, hogy $k \gg W$.

3.2. Elméleti hibák nagyságai

A 3.1. végén megjegyeztük, hogy az általunk használt szimuláció tulajdonképpen „statisztikus-szemüvegen” keresztül is nézhető. Ennek azért van jelentősége, mert Birkhoff tételében látott határértéket gépidő hiányában csak nagy k -ra szimuláljuk, ugyanakkor ahhoz, hogy ellenőrizhető legyen a szimuláció átültetése a numerikus modellre, tudnunk kell, hogy az elméletileg létező sűrűségfüggvényhez tartozó W felosztású H^W „tökéletes hisztogramtól” mennyire szabad eltérnie az általunk k iterációval kapott, normált G_k^W hisztogramnak.

Ezt a hibát a következőképp eredeztetjük. Mivel x_0 kezdőpontot véletlenszerűen generáljuk, ezért $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^k(x_0)$ -k szintén val.változók lesznek, s bár nem függetlenek, most ettől eltekintünk. Ekkor legyenek ezek rendre $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ független, azonos eloszlású val.változók $\rho : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvénnyel (ez persze f dinamika invariáns sűrűségfüggvénye). Legyen $\{I_l\}_{l=1}^W$ a már látott $[0, 1)$ W egyenletes részre történő felosztása, és $n_l := \{\text{hány darab } \xi_i \text{ kerül } I_l\text{-be}\}$ val.változó. Ekkor n_l értékeket $[0, 1)$ felett egy lépcsős függvényt kapunk. Természetesen ez nem hisztogram, azonban normálása 3.1. 2. állítása alapján történik. Az így kapott $N_l := \frac{W}{k} n_l$ val.változót fogjuk használni a következő megfontolások miatt:

$$p_l := \mathbf{P}(\xi_i \in I_l) = \int_{\frac{l-1}{W}}^{\frac{l}{W}} \rho(x) dx$$

Azaz p_l annak valószínűsége, hogy valamely ξ_i val. változó I_l -be esik. Ekkor

$$\mathbf{P}(n_l = j) = \binom{k}{j} p_l^j (1 - p_l)^{k-j} \quad j = 0, \dots, k$$

Azaz $n_l \sim \text{Bin}(k, p)$ binomiális eloszlású, s emiatt a következő tulajdonságait tudjuk:

- Szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2 n_l = k p_l (1 - p_l)$
- Várható értéke: $\mathbb{E} n_l = k p_l$

Tehát mindez N_l -re vonatkozóan:

- $\mathbb{D}^2 N_l = \frac{W^2}{k^2} \mathbb{D}^2 n_l = \frac{W^2}{k} p_l (1 - p_l)$
- $\mathbb{E} N_l = \frac{W}{k} k p_l = W p_l$

4. Állítás.

$$\mathbb{E}N_l = H_l^W$$

Ahol H_l^W a „tökéletes hisztogram” I_l partíció feletti értéke.

4. Bizonyítás. N_l felsorolt tulajdonságai és p_l definíciójából tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}N_l = W p_l = W \int_{I_l} \rho(x) dx$$

A „tökéletes hisztogram” definíciójából pedig következik már hogy $\mathbb{E}N_l = H_l^W$.

Ezután N_l hibáját H_l^W -től az L^2 távolsággal fogjuk becsülni. Bár kézenfekvő lenne *relatív* hibát nézni (χ^2 -próba jelleggel), de a mi eseteinkben a kettő körülbelül ugyanolyan eredményt ad, mert ρ sűrűségfüggvény közel konstans. Ezen felül L^2 választása mellett szól egy később látható előnyös tulajdonsága is, ami miatt ezt a becslést lesz könnyű elméleti úton számolni.

Így a hiba a következő val.változó lesz:

$$D := \|N_l - H_l^W\|_{L^2}^2 = \|N_l - \mathbb{E}N_l\|_{L^2}^2 = \sum_l |I_l| (N_l - \mathbb{E}N_l)^2$$

Ezután vegyük ennek $\mathbb{E}D$ várható értékét. Ezt a következőképp számoljuk:

$$\mathbb{E}D = \mathbb{E} \left(\sum_l |I_l| (N_l - \mathbb{E}N_l)^2 \right) = \sum_l \mathbb{E} (|I_l| (N_l - \mathbb{E}N_l)^2)$$

Mivel a W egyenletes részre való felosztás szerint $|I_l| = \frac{1}{W}$ ezért

$$\mathbb{E}D = \frac{1}{W} \sum_l \mathbb{E} ((N_l - \mathbb{E}N_l)^2) = \frac{1}{W} \sum_l \mathbb{D}^2 N_l \quad (6)$$

(6) bal oldalán lévő $\mathbb{D}^2 N_l = \frac{W^2}{k} p_l(1 - p_l)$ miatt:

$$\mathbb{E}D = \frac{1}{W} \sum_l \frac{W^2}{k} p_l(1 - p_l) = \frac{W}{k} \sum_l p_l(1 - p_l)$$

Amennyiben pedig a hisztogram W felosztása elég nagy (márpedig ahhoz, hogy a sűrűségfüggvényt jól szimuláljuk $W \geq 25$ vagy még többre érdemes választanunk), akkor

p_l definíciójából következően $(1 - p_l) \approx 1$. És ha az egész M fázistér (most $[0, 1)$) felett nézzük a hibát, akkor az elméleti várható hibára

$$\mathbb{E}D = \frac{W}{k} \sum_{l=1}^W p_l(1 - p_l) \approx \frac{W}{k} \sum_{l=1}^W p_l$$

Azonban $\sum_{l=1}^W p_l = \int_M \rho = 1$ miatt

$$\mathbb{E}D \approx \frac{W}{k}$$

A 2. táblázat mutatja ennek lehetséges értékeit különböző paraméterek mellett. 2 dimenzióban, ha analóg módon $[0, 1)^2$ W^2 részre van felosztva akkor persze:

$$\mathbb{E}D^{2\text{dim}} \approx \frac{W^2}{k}$$

A 3. táblázat mutatja ennek értékeit a paramétereiktől függően.

$\mathbb{E}D^{1\text{dim}}$ -re pontos értéket mondhatunk, ha $\rho(x) \equiv 1$ a sűrűségfüggvény, azaz például a $\{2x\}$ vagy a $\{10x\}$ dinamikai rendszer esetén. Ekkor $\forall l : p_l = \frac{1}{W}$ miatt:

$$\mathbb{E}D = \frac{W}{k} \sum_{l=1}^W \frac{1}{W} \left(1 - \frac{1}{W}\right) = \frac{W}{k} W \frac{1}{W} \left(1 - \frac{1}{W}\right)$$

Innen

$$\mathbb{E}D = \frac{W - 1}{k}$$

Ennek külön értékeit nem számoltuk ki, hiszen az előbb látott általános esettől minimálisan tér el ha $k \gg W$ (ezt pedig feltételezzük).

Megjegyzések

- Ez a becslés a függetlenség feltevése melletti optimális esetet mutatja, vagyis azt, aminél jobbra nincs remény akármilyen ügyes szimulációt is használjunk.
- Fontos látni, hogy a becslésünk nem D -re, hanem $\mathbb{E}D$ -re vonatkozik, azonban ha W nagy, ahogy azt már feltettük, akkor a nagy számok törvénye szellemében igaz lesz, hogy $D \approx \mathbb{E}D$.

Eredményeink kimutatásának szempontjából a továbbiakban még szükségünk lesz arra a hibára, amikor a Gauss-leképezést szimuláló hisztogram $[0, 1)$ első ezred feletti értéket hasonlítjuk a „tökéletes hisztogram” első ezred feletti értékével. Ezt a következő számolással kaphatjuk:

$$\mathbb{E}D_{\frac{1}{1000}}^{\text{Gauss}} := \frac{1000^2}{k} (p_{\frac{1}{1000}} - p_{\frac{1}{1000}}^2)$$

Figyeljük meg, hogy itt elhagytuk az eddig használt $|I_l|$ -es szorzót (de ezt a hibát a szimulációban is így fogjuk számolni). A Gauss-leképezés invariáns sűrűségfüggvénye miatt pedig

$$p_{\frac{1}{1000}} = \int_0^{\frac{1}{1000}} \frac{1}{(1+x) \ln 2} dx = 0.001441974$$

Innen

$$\mathbb{E}D_{\frac{1}{1000}}^{\text{Gauss}} = 0.001439895 \frac{1000^2}{k}$$

Az általunk választott $k = 5000000$ érték mellett ez:

$$\mathbb{E}D_{\frac{1}{1000}}^{\text{Gauss}} = 0.000287979 \tag{7}$$

Hasonló számítással élve $k = 5000$ -et választva kiszámoltuk még ugyanezt $W = 25$ esetben is:

$$\mathbb{E}D_{\frac{1}{25}}^{\text{Gauss}} = 0.006672729 \tag{8}$$

Nagyon fontos, hogy ezeknél a becsléseknél W csak 1, ezért nem várhatjuk, hogy $D \approx \mathbb{E}D$. Ezért ezek bemutatására több szimuláció átlagát fogjuk venni.

4. Numerikus modellek kerekítésének módszerei

Mielőtt továbbhaladnánk, foglaljuk össze az eddig tárgyalt témákat. A 2. fejezetben felhívtuk a figyelmet arra, hogy ha dinamikai rendszereket akarunk vizsgálni számítógépen, azaz egy numerikus modellre ültetjük át a valós modellt, akkor a folytonos fázistér diszkrétre cserélése miatt bizonyos számítások esetén a numerikus hiba megnőhet, megbízhatatlanná téve az így kapott eredményeket. Bemutattuk, hogy a dinamika többszöri iterációjakor a diszkrét fázistér milyen pontjait „veszthetjük el”.

Ezután a 3.1-ben bemutattuk, hogy ha feltételezzük egy dinamikai rendszerben az abszolút folytonos ergodikus invariáns mérték létezését, akkor létezik jól programozható módszer a sűrűségfüggvényének szimulálására. Azonban a 2. fejezetben említett sokszori iteráció esetén fellépő probléma előjön ennél a módszernél, ami egy folytonos fázistéren jól működne. 3.2-ben az ilyen szimulációkban, még folytonos fázistéren is elkerülhetetlen hibákat becsültük. Azonban diszkrétizált dinamika viselkedése érzékenyen függ N megválasztásától. Szerencsésen választott N -re jól közelíti a folytonos dinamika viselkedését, de az N -et kicsit megváltoztatva már egészen más viselkedést is mutathat [2, 5].

A következőkben a lehetséges kerekítési módszerekkel kapott invariáns sűrűségfüggvény szimulációk eredményeit az elméleti hibákkal fogjuk összevetni, és ezek alapján fogjuk levonni a dolgozat tárgyát képező eredményeket.

Megjegyzés

- Természetesen azon dinamikai rendszereknél, ahol ismerjük az invariáns sűrűségfüggvényt, ott a hozzá tartozó „tökéletes hisztogram” előállításához nem lenne szükségünk a fázistér diszkrétizációjára. Azonban ezek az elméleti eredmények csak azt szolgálják, hogy a dolgozat valódi témájához, azaz a numerikus kerekítési módszerek vizsgálatához az elméleti hibákat ismerjük.
- A továbbiakban minden kerekítési módszert a többszöri iterációk esetében vizsgálunk.
- Ehhez a következő alapvetést fogjuk használni: $i_0 = 0, i_1, i_2, \dots, i_N = 1$ -ek lesznek a $[0, 1]$ intervallum N részre való felbontásából eredő osztópontok (i_N -et félretéve $[0, 1)$ -é), és $i_t = \frac{t}{N}$, $t \in \{0, 1, \dots, N\}$ lesz a véletlenszerű kezdő osztópont.

4.1. Szokásos kerekítési módszer

Ez a kerekítési módszer a legalapvetőbbnek tekinthető. Úgy működik, hogy például a kezdő i_t pontra alkalmazva a dinamikát $f(i_t)$ -t kapjuk, ami nem feltétlenül egy osztópont. Ekkor tegyük fel, hogy $f(i_t)$ az i_l és i_{l+1} osztópontok közé esik, azaz $\frac{l}{N} < f(i_t) < \frac{l+1}{N}$.

Szokásos kerekítés esetén a szimuláló program azt teszi, hogy $f(i_t)$ -nek azt az osztópontot választja, ami a legközelebb esik hozzá. Egy iteráció alatt ebből nagy N választás esetén nem származik probléma, azonban figyeljük meg, mi történik a következő iterációnál. $f(i_t) = i_l$ vagy $= i_{l+1}$ attól függően, hogy melyik esik közelebb $f(i_t)$ valós értékéhez.

Ezután viszont a diszkrét felosztás miatt az előző kerekítéstől függően $f(i_l) = i_x$ (már kerekített) osztópont lenne, vagy $f(i_{l+1}) = i_y$ (szintén már kerekített) osztópont. i_x és i_y közötti osztópontok pedig „kiesnek” mert nem folytonos fázistéren vagyunk. Az f dinamikától függ azonban ezen osztópontok száma. Nézzük meg a vizsgált rendszerekben mennyi ezek száma, illetve néhány, a szokásos kerekítéshez fűződő egyéb problémát, és végül az általunk kapott eredményeket.

4.1.1. $\{2x\}$, $\{10x\}$

- Érdekes módon még akkor is adódhat a kerekítésből probléma, ha nincs is kerekítési hiba. Ez lép elő ezeknél a leképezéseknél, ugyanis ezeknél csak akkor lép fel kerekítési pontatlanság amikor a kezdőpontot kerekítjük az egyik osztópontra, utána pontosan tudjuk követni a $(\frac{l}{N})$ pont trajektóriáját, de sajnos ez a felkerekített osztópont nem lesz μ -tipikus, a hozzá tartozó trajektóriával pedig emiatt nem fogjuk tudni előállítani a sűrűségfüggvényt. Tulajdonképpen azt mondhatjuk, hogy az első kerekítés miatt minden lépésben legfeljebb 1 osztópont fog kiesni a lehetséges pontok közül.
- Ugyanez $\{10x\}$ -nél analóg módon 9 darab kimaradó osztópontot eredményez.
- $\{2x\}$ esetén ráadásul egy gépi számolási hiba is felmerül. Mégpedig ha N -et úgy választjuk, hogy $N = 2^z$, $z \in \mathbb{Z}_+$. Ekkor ugyanis tetszőleges kezdőpontból indulva legfeljebb z lépésben beragadunk a 0-ba.

4.1.2. Gauss-leképezés

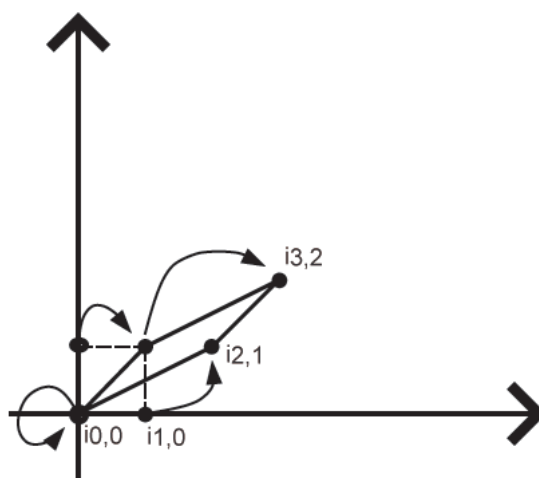
- Ebben az esetben is előfordul az előbb említett (deriváltakra visszavezethető) probléma, sőt itt már nem csak a kezdőpontot kell kerekíteni, hanem minden lépésben, ráadásul itt nem mindenhol ugyanannyi a kieső pontok száma, hiszen például az $[\frac{1}{2}, 1)$ be eső pontokra legfeljebb 1 pont esik ki, addig a 0 közelében a kieső pontok száma N közeli is lehet!
- Még a szokásos kerekítésnél maradva az megfigyelhető, hogy azt alkalmazva a Gauss-leképezést szimuláló programunknál az iterációk során kapott értékek beragadnak kis periódusú periodikus pályákra. A Gauss-leképezés esetében ez visszavezethető aritmetikai megfontolásokra, ugyanis ha N olyan szám melynek sok osztója van, akkor azon osztóira a $\{\frac{1}{x}\}$ leképezéssel $\{\frac{N}{j}\}$ -t kapjuk, ahol j osztja N -t, és $\frac{N}{j} \in \mathbb{Z}$ miatt a törtrésze 0 lesz. Azonban azt $\frac{1}{N}$ -re kerekítjük a szokásos kerekítéssel, hiszen 0-t nem engedhetjük meg zéróosztás elkerülése miatt. $\frac{1}{N}$ -re pedig minden iteráció után az előbb leírt kerekítés miatt önmagát fogjuk kapni.

4.1.3. CAT - leképezés

- A CAT hasonló lesz a $\{2x\}$ -hez, csak 2 dimenzióban. Itt is az fog fennállni, hogy csak a kezdőpont kell kerekíteni osztópontra, mert az utána kapott értékek, már a rácsra fognak esni, nem közé.
- 2 dimenziós esetben ezért azt figyeljük meg, hogy a leképezés hova viszi például az osztórács $i_{0,0}, i_{1,0}, i_{0,1}, i_{1,1}$ által meghatározott „egységnyezetet”. A dinamika után ezek a pontok rendre az $i_{0,0}, i_{2,1}, i_{1,1}, i_{3,2}$ lesznek. A 8. ábrán láthatóan, ezzel a leképezéssel olyan paralelogrammát kapunk (és más kezdőpontokra is), amiben nem fordul elő a kerekítés miatt kieső rácspont, ezért sejthetjük, hogy a CAT esetében jó eredményt fogunk kapni a szokásos kerekítés esetében is.

4.1.4. Eredmények szokásos kerekítéssel

- 4. táblázat $\{2x\}$ rendszer eredményeit mutatja. Vessük össze a 2. táblázatbeli 1 dimenziós elméleti eredményekkel. Jól látható, hogy a 4.1.1-ben tárgyalt osztópont



8. ábra. CAT leképezéssel kapott pontjai az osztópontok egységnyezetének

kiesés akkor jelent problémát, ha a hisztogramhoz képest a fázistér felosztása nem elég nagy. Az is látható, hogy a már említett 2^z -s felosztása a fázistérnek valóban milyen nagy problémához vezet.

- 5. táblázat $\{10x\}$ rendszer eredményeit mutatja. $\{2x\}$ -hez hasonló eredményekről beszélhetünk itt is, de itt már nagyon jól látszik hogy az a 9 darab kieső osztópont miatt a hibája már erősen meglátszik a szokványos kerekítésnek. Itt is megfigyelhető, hogy N növelésével csökken a hiba!
- 6. táblázat a Gauss-leképezéssel nyert eredményeket mutatja. A táblázat vízszintes vonala fölött olyan szimulációk eredményei állnak, ahol N olyan szám, aminek több osztója is akad, míg a vonal alatt az N -ek mind prímek. Ezt a választást 4.1.2-ben írtak miatt tettük, és az ott közöltek jól is mutatják az eredmények.

Az iterált pont az esetek többségében rövid időn belül „beakad” az első osztópontba, ha N -nek több osztója is van. Ugyanakkor hiába választjuk N -et prímmek (vonal alatti eredmények), hogy ezáltal egy osztója se legyen, a már említett „betegsége” a szokásos kerekítésnek itt is megmutatkozik. Ez az itt is „kieső”, de nem mindenhol ugyanannyi számú osztópontok miatt van. Ezért lesz a hiba itt is nagyobb az elméletinél. Az viszont itt is igaz, hogy N növelésével (de ugyanúgy prímmek választva), a hiba csökkenthető!

- 7. táblázat a CAT rendszer eredményeit mutatja. Az olvasó szempontjából fontos tudatni, hogy itt, mivel 2 dimenzióban vagyunk N és W felosztás mind a két dimenziótengely $[0, 1]$ intervallumára vonatkozik, vagyis N^2 fázistér osztópontokról beszélünk, és a hisztogram ebben az esetben W^2 egyenlő terület feletti lépcsős függvény.

Ezek tudatában, ha összevetjük 3. táblázatbeli várható elméleti hibákkal az általunk kapottakat, akkor látszik, hogy bizony előfeltevésünkkel szemben a szokásos kerekítés itt is csődöt mond, még a hisztogram felbontásához képest meglehetősen nagy fázistér felosztás ellenére is. Azonban kellően nagy N -re, javulnak az eredmények, sőt ilyenkor közel pontosnak mondhatjuk őket.

4.2. Randomizálás és „okos” randomizálás

A randomizálás ötlete nem egyedi ([1]). Ennek ötlete azért merül fel, hogy a 4.1-ben leírtak miatt a szokásos kerekítésnél fellépő „információ veszteséget” (a kieső pontok) a „mikro-perturbációk” módszerével visszkapjuk.

Úgy működik, hogy ha tudjuk, hogy r számú pont kiesik a szokásos kerekítés miatt, akkor ebben az esetben elvégezzük a szokásos kerekítést, majd ehelyett az i_l osztópont helyett a randomizáló kerekítés az i_l r sugarú környezetéből választ véletlenszerűen, így kerülnek vissza a kieső pontok a lehetségek értékek közé.

Az, hogy a random r -t hogy választjuk rajtunk múlik, de szem előtt kell tartanunk, hogy r bevezetésével az eddig determinisztikus rendszerből sztochasztikusát csinálunk, ami megváltoztatja az invariáns mértéket. Szerencsére azonban az új (sztochasztikus) rendszer invariáns mértéke közel lesz az eredetihez, ha a randomizálás kicsi (ezt a tulajdonságot nevezzük a dinamikai rendszer „sztochasztikus stabilitásának” [3, 4]). Mivel körülbelül $\frac{r}{N}$ hosszú intervallumon keverjük össze a pontokat, az invariáns mérték torzulásához törekednünk kell ezt a $\frac{r}{N}$ hányadost kicsire választani.

Nálunk a randomizálás ötlete először a Gauss-leképezés esetén merült fel, amikor láttuk, hogy N nem prím választásakor az iteráló pont beragad. Ekkor merült fel, hogy randomizáljuk a kerekítést, de egyelőre csak arra törekedtünk, hogy ebből a beragadásból a kerekítés lehetséges értékeit a mikro-perturbációval növelve „kirántssuk” az iterált osztópontot.

Így például a Gauss-leképezés invariáns sűrűségfüggvényét egész pontosan megkaptuk

már $r = 2$ választása esetén is. Ezt neveztük el „buta” randomizálásnak, amikor minden lépésben ugyanakkora r -et használunk a randomizáláshoz. Természetesen egy ilyen önkényes r választás nem feltétlenül kell, hogy pontos eredményt adjon, pont a már említett felmerülő változó számú kieső pontok miatt. A Gauss-leképezés esetében viszont csak a fázistér első kis részén merül fel az a probléma, hogy kevés pontot ad vissza a randomizálás. Az is érthető, hogy az önkényes $r = 3$ választás például $\{10x\}$ -nél, ahol 9 pont esik ki a fázistér minden osztópontjánál, nem adhat jó eredményt.

Ezen megfontolásokból kezdtük el vizsgálni az „okos” randomizálást, ami gyakorlatilag ugyanaz, amit már többször kifejtettük, hogy r -et minden kerekítésnél akkorára választjuk, ahány pont kieshet a szokásos kerekítésnél. (Azaz az iteráció minden lépésében elvégezzük a dinamikát az adott i_l pontra és az aktuális i_{l+1} szomszédjára is, és az $f(i_l)$ randomizált kerekítésénél az aktuális lépésben használt random szám $r = |f(i_l) - f(i_{l+1})|$ lesz.)

Nézzük meg, és vessük össze 2. és 3. táblázat értékeivel, hogy mekkora hibákat kaptunk a randomizáló kerekítést használva!

4.2.1. Eredmények „buta” és „okos” randomizálásokra

- 8. táblázat $\{2x\}$ rendszer eredményeit mutatja „buta” $r = 1$ randomizáláskor. Jól látható, hogy a randomizálás mennyire előnyös volt a diszkrét fázistérnek. Szinte minden, a szokásos kerekítés esetén előforduló problémára megoldást jelentett: nem kellett N -et nagyra választani és $N = 2^z$ esetén is jó eredményeket kaptunk.
- 9. táblázat $\{10x\}$ rendszer eredményeit hasonlítja nagy r és kicsi r „buta” randomizálás esetén. Vessük össze 2. táblázat értékeivel. Leszűrhető, hogy az „okosnak” mondható $r = 9$ (mert minden pontra igaz, hogy 9 esik ki) randomizálás jobb eredményt ad egy kisebb r -el szemben, sőt alapvetően a paraméterektől függetlenül megfelelő hibákat ad.
- 10. táblázat a Gauss-leképezés eredményeit mutatja „okos” és „buta” randomizáló kerekítést használva. A számok jól jelzik, hogy hogyan nő a pontosság a randomizálás r értékét növelve. Az is látszik, hogy N növelésével, már elég r -et „bután” például 6-nak választani, hiszen nagyjából így is pontos eredményt kapunk. Az

pedig nagy előnyt jelent, ha egy randomizáló kerekítésnél r -et betudjuk úgy állítani, hogy konstans legyen és a hibák sem nőnek meg emiatt. Azonban, hogy miért, azt a következő fejezetben fogjuk taglalni.

- Végül 11. táblázat a CAT dinamikai rendszerre kapott eredményeinket mutatja $r_x = 1, r_y = 0$ randomizálás esetén. Összevetve 7. táblázattal (a szokásos kerekítéssel) azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a randomizálás megintcsak azt az előnyt adja a kezünkbe, hogy kisebb N -re is jónak tekinthető lesz a szimuláció a diszkrét fázistéren.
- Felmerülhet még a kérdés is, hogy mikor éri meg számunkra az „okos” randomizálásra szánt plusz programozási idő? A Gauss-leképezés kapcsán vizsgáltuk meg ezt a kérdést, úgy, hogy megnéztük a szimulációval kapott hisztogramok mennyire térnek el a „tökéletes hisztogramtól” a $\{I_l\}_{l=1}^W$ hisztogram partíciók első I_1 intervalluma fölött.

Ennek az eltérésnek elméleti lehetséges nagyságát 3.2-ben (7) és (8) egyenletekkel kaptuk meg. Már ott is felhívtuk a figyelmet, hogy egy-egy szimuláció során kapott hiba nem tudná tükrözni a szimuláció helyességét, ezért itt ugyanazokkal a paraméterekkel több esetben kapott hibák átlagát vettük, mert ez statisztikailag jól közelíti az elméleti úton becsült várható értéket. (A szemléletesség miatt pedig az egész mintát közöljük.)

Vessük össze ezeket az eredményeket a 12., 13., 14 és 15 táblázatokban. Ezek alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy nagy pontosságot igénylő vizsgálatoknál (itt azért, mert a deriváltak ezeken a kis intervallumokon nagyok lehetnek) megéri az „okos” randomizálást használni.

A kerekítési módszerek tárgyalásának végén, az eredményeket leszűrve azt mondhatjuk, hogy bár N növelése sokat segít a kerekítések pontosságában, több olyan rendszer is van, ahol a nagyobb pontosság miatt jót tesz, ha bevezetjük a randomizáló kerekítést.

5. Ergodicitás megtartása

Birkhoff tételéből tudjuk, hogy ha a dinamikai rendszerünkben a keresett invariáns mérték ergodikus, akkor a sokaságátlag = időátlag, és az iteráció során kapott minta kirajzolja az invariáns mértéket tipikus (vagyis majdnem minden) kezdőpontra. Ha pontosan egy abszolút folytonos invariáns mérték van (ami persze ergodikus), akkor a randomizálós módszerek biztosítják, hogy a látott trajektória tipikus.

Az általunk eddig tesztelt dinamikai rendszerekben elméleti alapon tudtuk, hogy a rajtuk létezik pontosan egy abszolút folytonos invariáns mérték.

Azonban ha több abszolút folytonos invariáns mérték is van, akkor a fázistér felbomlik ergodikus komponensekre. Ezek lehetnek véges (vagy megszámlálható) sokan, mely esetben ezek a komponensek továbbra is abszolút folytonos, immár ergodikus mértékek tartójául szolgálnak. Szerencsétlenebb esetben a fázistér (Lebesgue szerint) nullmértékű ergodikus komponensekre esik szét, mely esetben az ergodikus invariáns mértékek között már nem lesznek abszolút folytonosak.

Mindkét esetben igaz, hogy az x fázispont trajektóriája csak azt az egy *ergodikus* invariáns mértéket rajzolja ki, amelyik az x -et „látja”, vagyis amelyik szerint x tipikus. Ez nem is baj, hiszen örülhetünk, ha a szimuláció választ ad arra a kérdésre, hogy vannak-e ergodikus komponensek, illetve mik ezek – hiszen sokszor nincs erről előre elméleti ismeretünk.

Ezért fontos tudnunk, hogy a vizsgált kerekítési módszerek megőrzik-e a rendszerek ergodikus, de még inkább a nem-ergodikus voltát. Más szóval, a véletlen perturbációk bevezetése nem eredményezi-e azt, hogy egy nem ergodikus rendszer „ergodikusnak látszik”, a szimulált trajektória elhagyja a kezdőpont ergodikus komponensét, és „áttéved” egy másikba.

Mivel ezt az eddigi rendszereken láttuk, hogy nem is fordulhat elő másképp, készítenünk kell egy olyan rendszert ami nem ergodikus, és tudjuk rajta, hogy hány darab, illetve milyen komponenset adhat meg a szimuláció során, ha a kerekítési módszerünk jó (ami ebben az esetben azt jelenti, hogy megtartja az ergodikusságot).

Úgy csináltunk ilyen dinamikai rendszert, hogy vettünk egy már eddig megismert egy komponensű rendszert, és a fázistér megduplázásával két egymás mellett álló ergodikus

rendszeret kaptunk. Erről tudjuk, hogy a fázistér $[0, 2)$ és a valós modelljében a fázistér két különálló ergodikus részből áll össze, azaz a Birkhoff tételből származó szimulációnk során elméleti úton (azaz még nem a numerikus modellben) csak olyan hisztogramot kaphatunk, ami vagy csak $[0, 1)$ vagy csak $[1, 2)$ felett vesz fel 0-tól eltérő értéket, attól függően, hogy az x_0 kezdőpontot a fázistér mely részéből kaptuk/választottuk.

Persze mindez nem feltétlenül lesz igaz a numerikus modellben, ahol a diszkretizáció miatt megtörténhet, hogy az i_t kezdő-osztópont valamelyik iterációja során a fázistér egyik feléből áttéved a másik felébe, és persze ilyenkor i_t pályája már a fázistérnek nem csak az egyik felében növeli a hisztogram értékeit. Ebben a fejezetben azt fogjuk vizsgálni, hogy a már megismert kerekítési módszerek mennyire megbízhatóak abban az értelemben, hogy mely esetekben veszítik el a feltételezett ergodikusságot. Illetve azt is megemlítjük, hogy hogyan tudunk ezen javítani.

A továbbiakban itt csak a randomizáló kerekítés ilyenyszerű hibáival fogunk foglalkozni, mert a szokásos kerekítési módszer esetében könnyen belátható, hogy nem történik keveredés. A randomizálásnál azonban, ha például $r = 2$ a randomizálás száma, akkor tudjuk, hogy egy-egy osztóponttól a randomizálás után kapott osztópont $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ távolságra lehet.

A mi szimulációs programunkban ezen értékek rendre $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ valószínűséggel jöhetnek ki. Ezután, ha a $[0, 2)$ fázistér $2N$ pontra van felosztva, a fázistér egyik feléből a másikba csak az adott fázistér két, a határhoz közeli osztópontjából juthatunk. Tegyük fel, hogy i_t kezdő-osztópont iterációjának tetszőleges lépésében a fázistér adott felének bármely pontját $\frac{1}{N}$ valószínűséggel kapjuk meg. Ekkor

$$\mathbf{P}(\text{áttévedünk}) = \frac{1}{N} \frac{2}{6} + \frac{1}{N} \frac{1}{6} = \frac{1}{2N}$$

Ekkor szita formulával kapjuk annak a valószínűségét, hogy a k iteráció során ≥ 1 pont áttéved. Így

$$\mathbf{P}_{k,N}^{r=2} \leq k \frac{1}{2N}.$$

Ugyanez például $r = 6$ esetén:

$$\mathbf{P}_{k,N}^{r=6} \leq k \frac{3}{2N}$$

Vessük össze ezeket az elméleti eredményeket a $\{2x\}$ által, a fent leírt módon kapott dinamikai rendszer szimulációja során kapottakkal. Az eredményeket úgy kaptuk, hogy az adott r értékkel elvégeztünk 500 szimulációt, és azt számoltuk egy változóval, hogy az 500 esetből háányszor történt meg az, hogy az iteráció nem ergodikus módon viselkedett (vagyis az iteráció áttévedt legalább egyszer a kezdő fázisterrészről a másikra).

| Tapasztalt keveredés valószínűsége | $p = \mathbb{P}_{k,N}^r$ | N | k | r |
|------------------------------------|--------------------------|----------|-------|-----|
| $\frac{120}{500}$ | $p \leq \frac{250}{500}$ | 10001 | 10000 | 2 |
| $\frac{22}{500}$ | $p \leq \frac{25}{500}$ | 100001 | 10000 | 2 |
| $\frac{3}{500}$ | $p \leq \frac{2.5}{500}$ | 1000001 | 10000 | 2 |
| $\frac{54}{550}$ | $p \leq \frac{75}{500}$ | 100001 | 10000 | 6 |
| $\frac{8}{500}$ | $p \leq \frac{7.5}{500}$ | 1000001 | 10000 | 6 |
| $\frac{1}{500}$ | $p \leq \frac{7.5}{500}$ | 10000001 | 10000 | 6 |

1. táblázat. $\{2x\}$ esetén megfigyelt áttévedések száma 500 szimuláció alapján

Az eredmények jól mutatják, hogy N növelésével miként tűnik el annak lehetősége, hogy keveredjen a trajektória, így azt, amit a randomizálás bevetésénél már megemlítettünk, itt is leszűrhetjük, hogy egy randomizáló kerekítéssel működő módszer csak úgy lehet megbízható, ha r -et nem választjuk túl nagyra relatíve (azaz, hogy ahhoz képest N sokkal-sokkal nagyobb legyen).

Az olyan rendszer esetében, mint itt, ahol tudtuk, hogy két komponens van, sőt még a komponensek fázisterének határait is ismertük, persze mondhatjuk, hogy r -et elég ha a határokon nem engedjük túl nagyra, de mivel ez a határ általában nem ismert, ezért mindenképp fontos leszögeznünk, hogy a randomizálást túl nagyra választva bizony könnyen elmosódhat annak a hisztogramnak a képe, amit a randomizálás nélkül kaphatnánk, és ezáltal megbízhatatlanná téve azt.

Élesen merül fel akkor az a kérdés, hogy a Gauss-leképezés esetén nagy pontosságot mutató „okos” randomizálást használva, az előre sejthető keveredés vajon hány esetben lép fel? Sajnos azt láttuk a szimulációnk eredményéből, hogy egy 500 alkalommal megismételt k iterációs trajektória szimulációja során mind az 500 esetben az egyik fázisterről átkerül

a másikkra. Így ezt a módszert, csak szoros megköötések mellett tudjuk pontos számításokra alkalmazni.

6. Konklúzió

Az elvégzett kísérletek eredményeit összefoglalva azt láttuk, hogy a szokásos kerekítés módszere valóban jól működhet olyan esetekben ahol N , azaz a diszkretizáció elég nagy, azonban azt is láttuk, hogy van olyan rendszer, ahol N növelése nem segít a problémán.

Ezért a randomizálás módszere jól jöhet nagyon sok esetben, és amint láttuk, a megfigyelt rendszereinkben ez leggyakrabban akkor segített, ha N nem volt elég nagy. Bemutattuk azt is, hogy sok esetben még nagyra választott N esetén is pontosabb eredményeket kapunk a randomizálás módszerével. A randomizálás témakörében megismertük a „buta” és „okos” randomizálás, és a felmerült kérdésre – hogy érdemes-e „okosan” randomizálni a „butával” szemben – is megkaptuk, hogy szinte mindig elég egy kisebb, de állandó r -el dolgozni, de arra is láttunk példát, hogy van olyan kérdés, amire „okos” randomizálással pontosabb választ kaphatunk.

Fontos eredmény volt megmutatni miként veszíti el megbízhatóságát az „okos” és a nagy r -rel választott „buta” randomizálás az ergodicitás megtartásában, mert könnyen elkeverhet egy amúgy ergodikus rendszert.

Persze a témával kapcsolatban felmerülnek még azon kérdések, hogy:

- Mi mondható el a keverésről, alkalmas-e a módszer $\mu(x \in I_l, f^n x \in I_l)$ számolására is?
- Mi a helyzet olyan dinamikai rendszerekben, ahol nem ismert az invariáns mérték?
- Mi történik olyan esetekben, ahol a „fizikai” mérték nem abszolút folytonos?

Ezek a kérdések további lehetséges kutatásokat ösztönözhetnek.

Hivatkozások

- [1] G. Domokos and D. Szász. Ulam's scheme revisited: digital modeling of chaotic attractors via micro-perturbations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 9(4):859–876, 2003.
- [2] G. Haller and G. Stépán. Micro-chaos in digital control. *Journal of Nonlinear Science*, 6(5):415–448, 1996.
- [3] G. Keller. Stochastic stability in some chaotic dynamical systems. *Monatshefte für Mathematik*, 94(4):313–333, 1982.
- [4] G. Keller and C. Liverani. Stability of the spectrum for transfer operators. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4)*, 28(1):141–152, 1999.
- [5] Y. Kifer. Computations in dynamical systems via random perturbations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 3(4):457–476, 1997.
- [6] C. Liverani. Rigorous numerical investigation of the statistical properties of piecewise expanding maps. A feasibility study. *Nonlinearity*, 14(3):463–490, 2001.
- [7] D. Szász. *Dinamikai rendszerek*. Egyetemi jegyzet, 2008.
- [8] S.M. Ulam. *Problems in modern mathematics*. Interscience Publishers, 1960.

7. Függelék

| $W \setminus k$ | 5000 | 50000 | 500000 |
|-----------------|-------|--------|---------|
| 25 | 0.005 | 0.0005 | 0.00005 |
| 100 | 0.02 | 0.002 | 0.0002 |
| 1000 | 0.02 | 0.002 | 0.0002 |

2. táblázat. $\mathbb{E}D^{1\text{dim}}$ értékei különböző k és W paraméterek esetén

| $W^2 \setminus k$ | 250000 | 500000 | 5000000 |
|-------------------|--------|---------|----------|
| 625 | 0.0025 | 0.00125 | 0.000125 |
| 10000 | 0.04 | 0.02 | 0.002 |

3. táblázat. $\mathbb{E}D^{2\text{dim}}$ értékei különböző k és W^2 paraméterek esetén

| <i>Hiba</i> \ | <i>N</i> | <i>W</i> | <i>k</i> | <i>d</i> |
|---------------|--------------------|----------|----------|----------|
| 0.012772 | 10001 | 25 | 5000 | 9930 |
| 0.015928 | 10001 | 25 | 5000 | 5739 |
| 0.005356 | 100001 | 25 | 5000 | 25483 |
| 0.006360 | 100001 | 25 | 5000 | 63187 |
| 0.015867 | 1000001 | 100 | 50000 | 2300 |
| 0.006836 | 1000001 | 100 | 50000 | 286965 |
| 0.001936 | 10000001 | 100 | 50000 | 134236 |
| 0.002594 | 10000001 | 100 | 50000 | 7176256 |
| 49.661464 | $1048576 = 2^{20}$ | 100 | 50000 | 1005353 |
| 49.667469 | $1048576 = 2^{20}$ | 100 | 50000 | 135020 |

4. táblázat. $\{2x\}$ eredményei szokásos kerekítés esetén különböző paraméterekre (d az i_d kezdőpont indexe)

| <i>Hiba</i> \ | <i>N</i> | <i>W</i> | <i>k</i> | <i>d</i> |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| 1.990013 | 100001 | 25 | 5000 | 75066 |
| 2.500025 | 100001 | 25 | 5000 | 58057 |
| 1.806022 | 10000001 | 25 | 5000 | 8558440 |
| 0.785993 | 10000001 | 25 | 5000 | 955828 |
| 8.187956 | 10000001 | 100 | 50000 | 5714853 |
| 6.147049 | 10000001 | 100 | 50000 | 4877972 |

5. táblázat. $\{10x\}$ eredményei szokásos kerekítés esetén különböző paraméterekre (d az i_d kezdőpont indexe)

| <i>Hiba</i> \ | <i>N</i> | <i>W</i> | <i>k</i> | <i>d</i> |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| 0.943538 | 100000 | 25 | 5000 | 53861 |
| 22.712225 | 100000 | 25 | 5000 | 57857 |
| 22.586469 | 1000000 | 25 | 5000 | 223338 |
| 9.615238 | 1000000 | 25 | 5000 | 52311 |
| 47.751126 | 1000000 | 100 | 50000 | 435171 |
| 0.235075 | 1000000 | 100 | 50000 | 36666 |
| 0.081015 | 10000000 | 100 | 50000 | 1970145 |
| 94.589841 | 10000000 | 100 | 50000 | 8896512 |
| 0.058049 | 104729 | 25 | 5000 | 99050 |
| 0.065956 | 104729 | 25 | 5000 | 49208 |
| 0.005222 | 15485863 | 25 | 5000 | 337058 |
| 0.004536 | 15485863 | 25 | 5000 | 14468435 |
| 0.020398 | 15485863 | 100 | 50000 | 5153920 |
| 0.019754 | 15485863 | 100 | 50000 | 844486 |
| 0.010421 | 95189089 | 100 | 50000 | 63384268 |
| 0.011743 | 95189089 | 100 | 50000 | 4263830 |

6. táblázat. Gauss-leképezés eredményei szokásos kerekítés esetén különböző paraméterekre (d az i_d kezdőpont indexe)

| <i>Hiba</i> \ | <i>N</i> | <i>W</i> | <i>k</i> | (d_x, d_y) |
|---------------|-----------|----------|----------|---------------------|
| 0.720623 | 1000001 | 25 | 250000 | (526048,4974) |
| 0.764194 | 1000001 | 25 | 250000 | (4547,642613) |
| 0.002523 | 100000001 | 25 | 250000 | (99209949,4397119) |
| 0.002595 | 100000001 | 25 | 250000 | (38920403,17466693) |
| 12.424041 | 1000001 | 100 | 500000 | (73618,625276) |
| 11.994545 | 1000001 | 100 | 500000 | (780028,649493) |
| 0.019817 | 100000001 | 100 | 500000 | (5771247,69474436) |
| 0.020825 | 100000001 | 100 | 500000 | (35880662,78810621) |

7. táblázat. CAT eredményei szokásos kerekítés esetén kül. paraméterekre (d_x, d_y a kezdőpont indexei)

| <i>Hiba</i> \ | <i>N</i> | <i>W</i> | <i>k</i> | <i>d</i> |
|---------------|--------------------|----------|----------|----------|
| 0.004534 | 10001 | 25 | 5000 | 3378 |
| 0.005945 | 10001 | 25 | 5000 | 6219 |
| 0.005457 | 100001 | 25 | 5000 | 34786 |
| 0.004858 | 100001 | 25 | 5000 | 26558 |
| 0.001813 | 1000001 | 100 | 50000 | 73638 |
| 0.002220 | 1000001 | 100 | 50000 | 14963 |
| 0.002390 | 1048576 = 2^{20} | 100 | 50000 | 34080 |
| 0.001741 | 1048576 = 2^{20} | 100 | 50000 | 1038150 |

8. táblázat. $\{2x\}$ eredményei $r = 1$ randomizálás esetén különböző paraméterekre (d az i_d kezdőpont indexe)

| <i>Hiba</i> \ | <i>N</i> | <i>W</i> | <i>k</i> | <i>d</i> | <i>r</i> |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.015561 | 100001 | 25 | 5000 | 4598 | 1 |
| 0.011825 | 100001 | 25 | 5000 | 1794 | 1 |
| 0.004248 | 100001 | 25 | 5000 | 91419 | 10 |
| 0.005887 | 100001 | 25 | 5000 | 63461 | 10 |
| 0.013365 | 10000001 | 25 | 5000 | 3647878 | 1 |
| 0.014571 | 10000001 | 25 | 5000 | 1016987 | 1 |
| 0.005645 | 10000001 | 25 | 5000 | 2279725 | 10 |
| 0.004202 | 10000001 | 25 | 5000 | 8308305 | 10 |
| 0.003672 | 10000001 | 100 | 50000 | 318568 | 1 |
| 0.003527 | 10000001 | 100 | 50000 | 5735290 | 1 |
| 0.001990 | 10000001 | 100 | 50000 | 9565145 | 10 |
| 0.002255 | 10000001 | 100 | 50000 | 5094872 | 10 |

9. táblázat. $\{10x\}$ eredményei $r = 9$ és $r = 1$ randomizálás esetén

| <i>Hiba</i> \ | N | W | k | d | randomizálás |
|---------------|---------|------|--------|---------|--------------|
| 0.019632 | 100000 | 25 | 5000 | 60320 | $r = 2$ |
| 0.021088 | 100000 | 25 | 5000 | 46044 | $r = 2$ |
| 0.005729 | 100000 | 25 | 5000 | 1764 | $r = 7$ |
| 0.006207 | 100000 | 25 | 5000 | 87350 | $r = 7$ |
| 0.004435 | 100000 | 25 | 5000 | 74316 | „okos” |
| 0.004667 | 100000 | 25 | 5000 | 28568 | „okos” |
| 0.003536 | 1000000 | 1000 | 500000 | 4942126 | $r = 2$ |
| 0.003629 | 1000000 | 1000 | 500000 | 341201 | $r = 2$ |
| 0.002244 | 1000000 | 1000 | 500000 | 7229542 | $r = 7$ |
| 0.002160 | 1000000 | 1000 | 500000 | 8049771 | $r = 7$ |
| 0.002028 | 1000000 | 1000 | 500000 | 2073348 | „okos” |
| 0.001987 | 1000000 | 1000 | 500000 | 9839038 | „okos” |

10. táblázat. Gauss-leképezés eredményei „okos” ($r \in \{1, \dots, (N - 1)\}$) és „buta” (r kül. konstans) randomizálás esetén

| <i>Hiba</i> \ | N | W | k | (d_x, d_y) |
|---------------|---------|-----|--------|-----------------|
| 0.002674 | 1000001 | 25 | 250000 | (859566,490875) |
| 0.002385 | 1000001 | 25 | 250000 | (219804,864134) |
| 0.002842 | 1000001 | 25 | 250000 | (850852,714331) |
| 0.020501 | 1000001 | 100 | 500000 | (743800,558993) |
| 0.020184 | 1000001 | 100 | 500000 | (153972,908793) |
| 0.019923 | 1000001 | 100 | 500000 | (32132,704902) |

11. táblázat. CAT eredményei $r_x = 1, r_y = 0$ randomizálás esetén különböző paraméterekre

| $ED_{\frac{1}{1000}}^{\text{Gauss}}$ | $D_{\frac{1}{W}}^{\text{Gauss}}$ | d | $N = 100000001$ | $W = 1000$ | $k = 5000000$ |
|--------------------------------------|----------------------------------|----------|-----------------|------------|---------------|
| | 0.000434 | 22153351 | | | |
| | 0.000214 | 16725462 | | | |
| | 0.000081 | 42239436 | | | |
| | 0.000270 | 98461837 | | | |
| | 0.001602 | 46800924 | | | |
| | 0.000009 | 96774055 | | | |
| | 0.001457 | 50010546 | | | |
| | 0.000184 | 7935389 | | | |
| | 0.000023 | 61185889 | | | |
| | 0.000636 | 8115267 | | | |
| | 0.000009 | 735276 | | | |
| | 0.000698 | 44874728 | | | |
| | 0.000407 | 77788533 | | | |
| | 0.001554 | 78245426 | | | |
| | 0.000109 | 20330700 | | | |
| | 0.000009 | 55356393 | | | |
| | 0.000113 | 12460813 | | | |
| | 0.000626 | 10832031 | | | |
| | 0.000081 | 93387007 | | | |
| | 0.000347 | 2894275 | | | |
| | 0.000654 | 63462926 | | | |
| | 0.002193 | 14063627 | | | |
| | 0.000001 | 66476243 | | | |
| | 0.000785 | 39655416 | | | |
| | 0.000474 | 53858166 | | | |
| | 0.000010 | 85014492 | | | |
| | 0.000033 | 11902746 | | | |
| | 0.000105 | 62776492 | | | |
| | 0.000003 | 94966420 | | | |
| | 0.000104 | 32592176 | | | |
| 0.000288 | 0.000441 | ÁTLAG | | | |

12. táblázat. $D_{\frac{1}{1000}}^{\text{Gauss}}$ értékeiből állított ³⁷30 elemű minta „buta” randomizáláskor

| $ED_{\frac{1}{1000}}^{\text{Gauss}}$ | $D_{\frac{1}{W}}^{\text{Gauss}}$ | d | $N = 100000001$ | $W = 1000$ | $k = 5000000$ |
|--------------------------------------|----------------------------------|----------|-----------------|------------|---------------|
| | 0.000025 | 83614764 | | | |
| | 0.000021 | 7041040 | | | |
| | 0.001356 | 82887678 | | | |
| | 0.000202 | 38640190 | | | |
| | 0.000005 | 27838636 | | | |
| | 0.000360 | 77415078 | | | |
| | 0.000174 | 41184586 | | | |
| | 0.000391 | 61592290 | | | |
| | 0.000696 | 32373774 | | | |
| | 0.000236 | 97398896 | | | |
| | 0.000003 | 37887266 | | | |
| | 0.000129 | 88357242 | | | |
| | 0.000041 | 26198139 | | | |
| | 0.000910 | 7155366 | | | |
| | 0.000197 | 8919170 | | | |
| | 0.000186 | 60465667 | | | |
| | 0.000501 | 35043944 | | | |
| | 0.000220 | 20767818 | | | |
| | 0.000041 | 10249768 | | | |
| | 0.000494 | 88890619 | | | |
| | 0.000184 | 206134 | | | |
| | 0.000207 | 77710683 | | | |
| | 0.000078 | 58182434 | | | |
| | 0.000029 | 25352925 | | | |
| | 0.000143 | 93271628 | | | |
| | 0.000323 | 29820934 | | | |
| | 0.000052 | 11033779 | | | |
| | 0.000058 | 71311258 | | | |
| | 0.000202 | 27880662 | | | |
| | 0.000027 | 87418322 | | | |
| 0.000288 | 0.000250 | ÁTLAG | | | |

13. táblázat. $D_{\frac{1}{1000}}^{\text{Gauss}}$ értékeiből állított ³⁸30 elemű minta „okos” randomizálásakor

| $\mathbb{E}D_{\frac{1}{25}}^{\text{Gauss}}$ | $D_{\frac{1}{W}}^{\text{Gauss}}$ | d | $N = 100001$ | $W = 25$ | $k = 5000$ |
|---|----------------------------------|-------|--------------|----------|------------|
| | 0.007217 | 81326 | | | |
| | 0.012111 | 83151 | | | |
| | 0.000897 | 94096 | | | |
| | 0.002021 | 84497 | | | |
| | 0.004907 | 88316 | | | |
| | 0.018238 | 42460 | | | |
| | 0.001228 | 77802 | | | |
| | 0.028917 | 45659 | | | |
| | 0.003030 | 18198 | | | |
| | 0.000226 | 69455 | | | |
| | 0.011015 | 22174 | | | |
| | 0.004907 | 65713 | | | |
| | 0.000627 | 1233 | | | |
| | 0.000627 | 25049 | | | |
| | 0.004907 | 43052 | | | |
| | 0.003606 | 31206 | | | |
| | 0.010010 | 57590 | | | |
| | 0.000025 | 52023 | | | |
| | 0.002495 | 2658 | | | |
| | 0.000623 | 17253 | | | |
| | 0.009990 | 91069 | | | |
| | 0.002021 | 766 | | | |
| | 0.019614 | 81681 | | | |
| | 0.005632 | 35153 | | | |
| | 0.046246 | 9499 | | | |
| | 0.000226 | 89036 | | | |
| | 0.000627 | 72271 | | | |
| | 0.001604 | 16631 | | | |
| | 0.015613 | 61977 | | | |
| | 0.014412 | 57849 | | | |
| 0.006673 | 0.007787 | ÁTLAG | | | |

14. táblázat. $D_{\frac{1}{25}}^{\text{Gauss}}$ értékeiből állított ³⁹30 elemű minta „buta” randomizáláskor

| $\mathbb{E}D_{\frac{1}{25}}^{\text{Gauss}}$ | $D_{\frac{1}{W}}^{\text{Gauss}}$ | d | $N = 100001$ | $W = 25$ | $k = 5000$ |
|---|----------------------------------|-------|--------------|----------|------------|
| | 0.005618 | 26234 | | | |
| | 0.002029 | 96711 | | | |
| | 0.022515 | 20713 | | | |
| | 0.000025 | 1072 | | | |
| | 0.001222 | 72598 | | | |
| | 0.002029 | 34105 | | | |
| | 0.006392 | 5346 | | | |
| | 0.000402 | 40291 | | | |
| | 0.030608 | 75654 | | | |
| | 0.000025 | 26210 | | | |
| | 0.000226 | 30572 | | | |
| | 0.003606 | 37921 | | | |
| | 0.004907 | 22035 | | | |
| | 0.004893 | 36801 | | | |
| | 0.007233 | 42585 | | | |
| | 0.012089 | 4742 | | | |
| | 0.000224 | 15305 | | | |
| | 0.001222 | 53961 | | | |
| | 0.000226 | 47397 | | | |
| | 0.002505 | 7339 | | | |
| | 0.000025 | 19755 | | | |
| | 0.008091 | 23789 | | | |
| | 0.013236 | 14435 | | | |
| | 0.000025 | 76462 | | | |
| | 0.032382 | 16980 | | | |
| | 0.000402 | 59720 | | | |
| | 0.000025 | 47995 | | | |
| | 0.008109 | 22282 | | | |
| | 0.005618 | 24057 | | | |
| | 0.012089 | 38449 | | | |
| 0.006673 | 0.006267 | ÁTLAG | | | |

15. táblázat. $D_{\frac{1}{25}}^{\text{Gauss}}$ értékeiből állított ⁴⁰30 elemű minta „okos” randomizáláskor