Matematikai pénzügyek és az általános egyensúlyelmélet

Néhány triviális, de fontos észrevétel

Medvegyev Péter

2009, december

Az általános egyensúlyelmélet

1. Neve ellenére nem is nagyon általános. Az általánosság azt jelenti, hogy az összes piac egyidejű egyensúlyát írja le.
2. A legkidolgozottabb matematikai-közgazdasági elmélet. Virágkora 1950-1970 között.
3. Matematikailag a konvex analízis és a fixpont-tételekre épül, de bizonyos vizsgálatok például differenciáltopológiai eszközökre épülnek.
4. Közgazdaságilag azt állítja, hogy a kereslet és a kínálat képes egyensúlyra jutni. Az egzisztencián túl, például a stabilitást, vagy az egyértelműséget már csak nagyon kemény és szigorú matematikai állításokkal tudja igazolni. Legfontosabb fogalma a gazdasági szereplők racionalitása, explicite szerepel benne a fogyasztók hasznossági függvénye. Számos szigorú feltételt tartalmaz, lényegében a korai szabadversenyes kapitalizmus egy lehetséges modellje, de valószínűleg soha nem létező szituációt modellez.
5. Nem túl erős a bizonytalanság modellezésében, de eljutott a no-arbitrage fogalmához.

Matematikai pénzügyek

1. Praktikus modellezési igény, megfigyelhető adatokra épít. Nem szívesen szerepelteti a haszonossági függvényeket.
2. Az egyensúly helyett a no-arbitrage a központi fogalma.
3. Elsősorban a bizonytalanságra koncentrál.
4. Fő matematikai háttere a valószínűségszámítás és a sztochasztikus folyamatok elmélete.
5. Legfontosabb fogalma a kockázatsemleges mérték.

Az előadásban elsősorban azt szeretném demonstrálni, hogy a két elmélet nem konkurens, nem is párhuzamos, hanem a matematikai pénzügyek része az általános egyensúlyelméletnek és csak teljes piacokon tudja kiküszöbölni a hasznossági függvényeket.

Kitérő, az ikertermelés problémája

A helyzet formálisan hasonló a marxi értékelmélettel kapcsolatos legfontosabb kritikai észrevétellel: A marxi elmélet szerint az árakat a költségek határozzák meg. Marx/hivatalos PG lényegében egyetlen költséget ismert el a munkát. Két termék ikertermék, ha azonos gyártási folyamat állítja elő. Ilyenkor a termékek egymás közötti ár aránya nem dönthető el, a kereslet, vagyis a fogyasztók hasznossági függvénye nélkül. Formálisan, ha nincsen ikertermelés, akkor az árak egy alkalmas egyenletrendszer megoldásai, ha azonban van akkor egy programozási feladat duális megoldása adja az árakat. A duális megoldás valójában a határhasznokat adja. Ezeket hívták árnyékáraknak.

A pénzügyi árazás alapmodellje

1. Két időpont van: "ma" és "holnap".
2. A "holnap" időpontban legyen értelmezve egy $(\Omega, A, \mathbf{P})$ valószínűségi mező. A téren értelmezett valószínűségi változóknak legyen adott egy L halmaza, amelyet a lehetséges pénzügyi eszközök "holnapi" értékeinek halmazának képzelünk el. Valamely ξ pénzügyi eszköz "holnapi" értéke ismeretlen és így valószínűség változó. A $\mathbf{P}$ a tényleges statisztikai valószínűség és az egyes $\xi \in L$ eszközök eloszlását "írja le".
3. Az alapgondolat/feltétel, hogy az **elhanyagolható tranzakciós költségek** miatt az L egy lineáris tér: Ha ξ_1 és ξ_2 két pénzügyi eszköz, akkor mindig megengedjük, hogy ezekből tetszőleges módon, tetszőleges súlyokkal portfoliót csináljunk. Ez a feltétel emlékeztet a lineáris tevékenységelemzési modell alapfeltételére. Az egyetlen eltérés, hogy most a negatív súlyok is megengedettek. A pénzügyi eszközök tetszőleges, költségmentes kombinálhatósága a pénzügyek alapaxiómája, alapfeltétele.

A pénzügy axiómája, mi a pénz?

Nyilván ez idealizáció, a valóságban vannak költségek, de a pénzügyi elmélet alapfeltevése a **korlátlan és költségmentes portfolió képzés**.

A pénz olyan speciális áru, amely nagyon alacsony tranzakció költségek mellett cserélhető térben és időben.

A nem teljesség problémája

1. Egy $\xi \in L$ valószínűségi változó lehet valamilyen későbbi időpontban esedékes kifizetés. Az időpont lehet a "holnap" után is és a ξ értéke nyilván függhet ettől az időponttól. Így az L dimenziója nagyon nagy esetlegesen végtelen is lehet, ugyanis a figyelembe veendő időpontok számát nem tudjuk értelmesen korlátozni.
2. Az L nem feltétlenül egyezik meg az összes valószínűségi változókkal, hanem ez utóbbi egy valódi altére. Ennek oka, hogy nem minden egyes ω kimenetelhez, van "biztosítás". Bekövetkezhetnek olyan ω kimenetelek, amelyekre nem "számítottunk" és nem kötöttünk rájuk "biztosítást". Másképpen lehetnek olyan valószínűségi változók, amelyek nem elemei az L térnek. Ilyenkor mondjuk, hogy a **modell nem teljes**.

A probléma megfogalmazása

Problem

Mi egy "holnap" realizálódó valószínűségi változó "mai" ára? Mennyit kell fizetni "ma", hogy "holnap" megkapjuk a ξ változót?

Ha $\pi(\xi)$ jelöli a ξ változó által leírt eszköz "mai" árát, akkor a kérdés a következő:

$$\pi(\xi) = ?$$

Alapfeltétel: a $\pi(\xi)$ a ξ lineáris függvénye:

$$\pi(a\xi_1 + b\xi_2) = a \cdot \pi(\xi_1) + b \cdot \pi(b\xi_2).$$

Általában nem teljesül, de ennek oka, hogy vannak tranzakciós költségek és a tetszőlegesen nagy portfoliók szabályozási okokból nem hozhatók létre.

Az egy ár törvénye

Definition

Ha a π árfüggvény lineáris, akkor azt szokás mondani, hogy teljesül az **egy ár törvénye**.

Ha az egy ár törvénye nem teljesülne, akkor a szabad és költségmentes portfolió készítés szabálya/feltétele miatt az olcsóbbat meg lehetne venni a drágábbat el lehetne adni és így lehetne végtelen pénzt keresni.
Az egy ár törvényt szokás ketchup törvénynek is mondani.

Egy kétliteres ketchup ára megegyezik két egyliteres ketchup árával.

Empirikusan ellenőrizhetjük. sajnos nem igaz. Egyrészt azonos márkából nincsen egy meg kétliteres és a nagyobb kiszereléseknél pedig a szabály nem teljesül: A piac nem teljes és vannak tranzakciós költségek.

A reprezentációs tétel

Theorem

Tegyük még fel, hogy a π valamilyen értelemben **folytonos**. *Ekkor*

$$\pi(\xi) = \int_{\Omega} \xi d\mu$$

alakban integrálként reprezentálható.

Ez egy elv, ilyen tétel valójában nincsen, ugyanis túl általános, de nagyon sok ilyen jellegű tétel van. Mi a μ és a **P** viszonya?

1. Ha $\xi \geq 0$, akkor feltehető, hogy $\pi(\xi) \geq 0$, így a μ valódi mérték, vagyis nincs olyan halmaz, amelyre $\mu(A) < 0$.
2. Feltesszük, hogy van kockázatmentes termék, vagyis feltesszük, hogy $1 \in L$. Az 1 változót szokás elemi kötvénynek mondani. Mivel $\pi(1)$ véges, ezért a μ véges mérték. Legyen $(1+r)^{-1} \doteq \mu(\Omega)$.

Az árképlet

Ekkor

$$\pi(\xi) = \int_\Omega \xi d\mu = \frac{1}{1+r}\int_\Omega \xi d(1+r)\mu = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi)}{1+r},$$

ahol **Q** valószínűségi mérték. Az ár megegyezik a "holnapi" kifizetés diszkontált várható értékével. Az egyetlen bökkenő, hogy a várható értéket nem a statisztikailag megfigyelhető **P** szerint, hanem a matematikai fantáziavilágban létező **Q** szerint kell venni

Kockázatsemleges mérték és kockázatmentes hozam

Definition

A $\mathbf{Q}$ szokásos neve kockázatsemleges mérték. Ennek oka, hogy a $\mathbf{Q}$ alatt a π diszkontált várható kifizetés. (Azt mondjuk, hogy valaki kockázatsemleges, ha valamely változó várható értékét azonosnak tekinti a változó értékével.)

Definition

Az r-et szokás kockázatmentes hozamnak is mondani.

Vegyük észre, hogy a mértékcserének és a képletnek semmi köze az opcióárazáshoz, ahol ez a jelenség történetileg először megjelent. Valójában egy teljesen univerzális elvről van szó, ahol a fő szerepet a linearitás és a reprezentációs elv játsza. A mértékcserét az opcióárazás kapcsán szokás behozni és ott "meglepetést" okoz.

Kockázatsemleges mérték és a statisztikai mérték ekvivalenciája

1. Ha $\mathbf{P}(A) > 0$, akkor feltehető, hogy $\pi(\chi_A) > 0$. Ha pozitív valószínűséggel kapunk valamit, és egyébként nem veszítünk, akkor feltehető, hogy a termék ára pozitív, így $\mathbf{Q}(A) > 0$.
2. Ha $\mathbf{P}(A) = 0$, és mégis $\mathbf{Q}(A) > 0$, akkor semmiért kapnánk valamit.
3. Ha $\mathbf{Q}(A) = 0$, akkor az integrál előállítás miatt nyilván $\mathbf{P}(A) = 0$.

Theorem

A $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ mértékek ekvivalensek, vagyis valamely A halmaz valószínűsége a $\mathbf{P}$ alatt pontosan akkor nulla, ha a $\mathbf{Q}$ alatt is nulla.

A folytonosság feltétele problémás

- A π linearitása a tranzakciós költségek elhanyagolását jelenti és első körben megengedhetőnek látszó absztrakció.
- A folytonosság azonban nem feltétlenül teljesül. Ha $\xi_n \to \zeta$ és $\eta_n \to \zeta$ az $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben akkor, az átlagos hozamok konvergálnak. Ugyanakkor ha a $(\xi_n - \zeta)$ szórása a végtelenhez tart és a $(\eta_n - \zeta)$ szórása nullához tart, akkor pénzügyileg a két helyzet teljesen különböző. Feltehetőleg $\pi(\xi_m) \nearrow \infty$, így a folytonosságot jelentő
$$\lim_{n\to\infty} \pi(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(\eta_n) = \pi(\zeta)$$
nem teljesülhet. Abból, hogy a hozamok konvergálnak az áraknak nem kell feltétlenül konvergálni. Figyelembe kell venni a kockázatot. Ez azt is mutatja, hogy az L zártsága sem természetes feltétel. Elképzelhető, hogy az L valamelyik határpontjának az ára végtelen, vagyis a π nem terjeszthető ki véges módon az L lezártjára!

Nem minden konvergencia fogalom jó

Felmerül, hogy a kockázat miatt vegyük a konvergenciát "erősre", vagyis csak igen szigorú feltételek esetén engedjük meg, hogy két valószínűségi változó közel legyen egymáshoz. Ha azonban a konvergenciát például az L^{∞} térben definiáljuk, vagyis két valószínűségi változót akkor tekintjük közelinek, ha egy valószínűséggel

$$|\xi_1(\omega) - \xi_2(\omega)| < \varepsilon$$

és persze ilyenkor fel kell tenni, hogy a változók korlátossak, akkor azonban nem tudunk reprezentáló mértéket csinálni, ugyanis az L^{∞} téren értelmezett folytonos lineáris funkcionálok nem írhatók fel integrál alakban.

Nem negatív lineáris funkcionálok folytonossága

Theorem

Ha π valamely L^p téren, $p \geq 1$, értelmezett π lineáris funkcionál nem negatív, vagyis

$$\xi \geq 0 \Longrightarrow \pi(\xi) \geq 0,$$

akkor a π folytonos.

- A tétel általánosítható, de az egyszerűség kedvéért csak evvel az esettel foglalkozunk. Az érdekes két eset a már említett $p = 1$ és $p = 2$ esetek. De ha magasabb rendű momentumokat is alkalmazni akarunk a kockázat definíciójában, akkor p esetleg nagyobb mint kettő.
- A tételben a feltételi halmaz a teljes alaptér, vagyis az összes, alkalmasan integrálható, valószínűségi változónak van ára, vagyis a modell **teljes.** Ez igen szigorú feltétel.

Közgazdasági interpretáció

Theorem

Ha a piac teljes és minden követelés várható hozama véges, akkor teljesül a reprezentációs elv, így minden követelés ára

$$\pi(\xi) = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi)$$

módon írható.

Bizonyítás

Legyen π egy nem negativ, lineáris funkcionál és legyen (ξ_n) nullához tartó sorozat. Mivel a nem negativitás és a linearitás miatt

$$|\pi(\xi_n)| \leq \pi(|\xi_n)|),$$

elég megmutatni, hogy a jobb oldal nullához tart. Ezért feltehető, hogy a ξ_n nem negatív. Elég megmutatni, hogy minden (ξ_n) sorozatnak van (ξ_{n_k}) részsorozata, amelyre a $\pi(\xi_{n_k})$ nullához tart. Elég ritka sorozatot véve a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n_k}$ összeg az L^p térben konvergens. (Vegyük azt a részsorozatot, amelyre $\left\|\xi_{n_k}\right\| \leq 2^{-k}$.) Legyen a határérték ξ_∞. Világos, hogy a π monotonitása és a $\xi_{n_k} \geq 0$ miatt

$$\sum_{k=1}^{N} \pi\left(\xi_{n_k}\right) \leq \pi\left(\xi_\infty\right) < \infty.$$

Mivel ez minden N-re igaz, a $\sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(\xi_{n_k}\right)$ sor konvergens, következésképpen $\pi\left(\xi_{n_k}\right) \to 0$.

A több periódusos modell

- Az időperiódusok száma véges, T, a lehetséges S alaptermékek száma, m, is véges. Tetszőleges időpontban a lehetséges portfoliók a véges sok alaptermék lineáris kombinációi, így minden időpontban a lehetséges portfoliók a valószínűségi változók körében egy véges dimenziós alteret alkotnak. Az S egy m vektorból álló T hosszú idősor, amely elemei valószínűségi változók. Az $S_i(t, \omega)$ azt adja meg, hogy az i-edik termék t időpontban mennyit ér, ha az ω kimenetel "jött be". Az $S_i(t, \omega)$ nyilván lehet pozitív és negatív is.
- Minden t időpontban adott egy $\mathcal{F}_t$ eseménytér, amely a t időpontig bekövetkezett eseményeket írja le. Világos, hogy minden t-re $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$.

Az arbitrázs árazás elve

Mi a T időpontban értelmezett valamely H_T véletlen követelés ára a jelenben?

A válasz természetesen az, hogy nem tudjuk. Függ a kereslettől és a kínálattól.

Az árakat mindig a piac dönti el!

Van azonban egy speciális eset. A speciális eset az, amikor a H_T véletlen követelés "lefedezhető", vagyis az alaptermékekből "kikeverhető". Ilyenkor a H_T és az S alaptermékek ára összefügg! Mivel az S árai a jelenben ismertek, matematikai úton kiszámolható a H_T jelenlegi ára is.

Martingálmérték

Ilyenkor is a

$$\pi\left(H_T\right)=\frac{1}{\left(1+r\right)^T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T\right)$$

képletre számítunk. Ilyenkor a **Q** neve martingálmérték. Mivel az S-et már diszkontáltuk, feltesszük, hogy $r=0$.

Definition

A **Q** mértéket az S martingálmértékének mondjuk, ha az S martingál a **Q** alatt.

Vegyük észre, hogy az eredeti **P** mérték alatt az S elemeinek nincs is feltétlenül várható értéke, a **Q** alatt azonban nem csak, hogy létezik a várható érték, hanem az idő szerint még konstans is, vagyis

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(t+1\right)\right)=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(t\right)\right).$$

A lehetséges fedezések halmaza

Vezessük be az

$$K \circeq \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \theta(t)\left(S(t) - S(t-1)\right) \right\}$$

halmazt, ahol θ az előrejelezhető stratégiákon fut keresztül. A K az $S(t)$ árfolyamok megváltozásából származó lehetséges árfolyamnyereségek halmaza. Az analízisben megszokott módon L_{+}^{0} jelölje a nem negatív valószínűségi változók halmazát. A díjmentes lomtalanitás feltételét használva vezessük be az

$$C \circeq K - L_{+}^{0},$$

valamint a $\mathrm{cl}(C)$ halmazokat, ahol a lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő, és a C definíciójában a kivonás jel a komplexus kivonást jelent.

Az arbitrázs lehetetlenségének elve

Feltesszük, hogy nem lehet a θ portfoliót dinamikusan úgy összeállítani, hogy kockázat nélkül nyereséghez jussunk. Vagyis nem lehet olyan H valószínűségi változót a megadott módon előállítani, amelyre $H \geq 0$, vagyis soha nem veszítünk, ugyanakkor egy pozitív mértékű halmazon $H > 0$, vagyis azért egy pozitív valószínűségű halmazon azért nyerünk.

Definition

Ha ilyen H nincsen, akkor azt mondjuk, hogy nincsen arbitrázs.

Az eszközárazás első alaptétele véges időhorizonton

Diszkrét, véges időhorizont esetén az úgynevezett eszközárazás első alaptételének legáltalánosabb alakja a következő:

Theorem (Dalang–Morton–Willinger)

A következő állítások ekvivalensek:

1. $C \cap L^0_+ = \{0\}$.
2. $C \cap L^0_+ = \{0\}$ *és* $C = \mathrm{cl}(C)$.
3. $\mathrm{cl}(C) \cap L^0_+ = \{0\}$.
4. *Megadható olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűség, amely ekvivalens az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, amelyre a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *Radon–Nikodym derivált korlátos, és amely mellett az* S *m-dimenziós martingál.*

Megjegyzés

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben szereplő első $C \cap L_{+}^{0} = \{0\}$ állítás azt jelenti, hogy nincsen olyan $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető stratégia, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T} \theta(t)(S(t) - S(t-1)) \geq 0$$

és egy pozitív mértékű halmazon az egyenlőtlenség szigorú. Másképpen fogalmazva az első állítás szerint nincsen arbitrázs. A tétel szerint annak szükséges és elegendő feltétele, hogy ne legyen arbitrázs éppen az, hogy az eszközök árfolyama egy alkalmas mérték esetén martingál legyen.

Árazás martingálmérték esetén

Tegyük fel, hogy a H_T követelést sikerült előállítani egy λ kezdeti befektetés és egy $\sum_{t=1}^{T} \theta(t)(S(t) - S(t-1))$ összegeként, vagyis

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \theta(t)(S(t) - S(t-1)).$$

Ha $\mathbf{Q}$ martingálmérték akkor a két oldalon a $\mathbf{Q}$ szerint várható értéket véve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_T) &= \lambda + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \theta(t)(S(t) - S(t-1))\right) = \\ &= \lambda + 0 = \lambda. \end{aligned}$$

Árazás martingálmérték esetén

Mivel a $\sum_{t=1}^{T}\theta(t)(S(t)-S(t-1))$ költsége nulla, ezért az ár csak a λ kezdeti befektetés lehet. Így

$$\pi(H_T)=\lambda=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_T).$$

Elveszett illuziók

A gondolatmenet, csak akkor alkalmazható, ha a H_T fedezhető. Mivel ezt tetszőleges H_T esetén elvárjuk, ezért a modellnek teljesnek kell lenni, egyébként a gondolatmenet és az árazó képlet nem alkalmazható.

Theorem

Véges időhorizont esetén, ha a modellben nincsen arbitrázs és a modell teljes, akkor az alapul vett $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ modell véges számú atomból áll. Ilyenkor az alaptermékek árfolyama véges fával írható le. Az elágazások maximális száma éppen az alaptermékek száma.

Corollary

A modell matematikailag akkor nem triviális, ha az időhorizont folytonos. Ilyenkor a modell felírásához szükséges a sztochasztikus analízis.

Árazás nem teljes piacokon

A technikai bonyodalmak elkerülése céljából tegyük fel, hogy az időparaméter diszkrét, és az eseménytér végesen generált, vagy ami ugyanaz az S eszközárfolyam valamilyen fával írható le. A fának nem kell feltétlenül szabályosnak lenni, vagyis nem kell feltenni, hogy az egyes elágazások száma azonos legyen az eszközök számával. Például a hagyományos kötvény-részvény modell esetén a fa lehet három vagy akár száz elágazású is. Legyen u valamilyen befektető hasznossági függvénye. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az u deriválható, konkáv, szigorúan monoton nő és a teljes számegyenesen értelmezett.

A haszonmaximalizációs probléma

A befektető haszonmaximalizációs problémája a következő:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(u(f)\right) \to \max, \tag{1}$$

$$f = w_0 + \sum_{t=1}^{T} \theta\left(t\right) \Delta S\left(t\right).$$

Vagyis a feladat az, hogy adott w_0 kezdőkészletből kiindulva és T időszakon keresztül az S-sel kereskedve átlagban mennyi hasznosságot tudunk a T időszak végére maximum elérni. Természetesen az átlagot a statisztikai, vagyis az "objektív" valószínűség mellett kell venni. Erre utal a $\mathbf{P}$ felső index. Az u szigorúan monoton nő, így a feltételi halmazban az egyenlőség helyébe egyenlőtlenség írható.

A haszonmaximalizációs probléma átfogalmazása

Első lépésként belátjuk, hogy a fenti maximum probléma ekvivalens a

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(u(f)\right) \to \max, \tag{2}$$
$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(f\right) \leq w_0, \ \mathbf{Q} \in \mathbb{M}$$

problémával, ahol $\mathbb{M} \overset{\circ}{=} \mathbb{M}\left(S\right)$ jelöli az S martingálmértékeinek halmazát. Hangsúlyozni kell, hogy $\mathbb{M}$ a martingálmértékek és nem az ekvivalens martingálmértékek halmazát jelöli. Ha $\mathbb{P}$ jelöli a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens mértékek halmazát, akkor az ekvivalens martingálmértékek halmaza $\mathbb{M} \cap \mathbb{P}$. A (2) feladat ismét könnyen interpretálható. Ha a diszkonttényező azonosan egy, akkor a $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}$ mértékek a lehetséges árvektorok halmazával azonosíthatóak, ugyanis ilyenkor a $\mathbf{Q}\left(A\right)$ éppen a χ_A alakú T időszaki kifizetés ára. Világos, hogy az ilyen jószágok árának ismerete alapján az összes f kifizetés ára is megadható és a kifizetés ára éppen $\mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(f\right)$ lesz. A feladat szerint meg kell keresni a maximális várható hasznosságot biztosító azon f fogyasztást, amelyre az összes lehetséges, számbajöhető árvektor mellett a költségvetési korlát teljesülni fog.

A haszonmaximalizációs probléma átfogalmazása

Érdemes azonban ezen a ponton egy további megjegyzést tenni. Természetesen a $\mathbf{Q}(A)$ csak akkor tekinthető árnak, ha a T időszaki χ_A kifizetés fedezhető. Ha ezt implicite minden A esemény esetén elvárjuk, akkor a $\mathbf{Q}(A)$ árként való interpretációjával implicite feltételezzük, hogy a piac teljes, mi pedig éppen a nem teljes esetet vizsgáljuk, így a második feladat említett interpretációja némi csúsztatást tartalmaz.

A nincsen arbitrázs feltétel

A nincsen arbitrázs feltétel szerint a

$$K \stackrel{\circ}{=} \left\{ f \mid f = \sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\,\theta(t) \right\}$$

altér csak az origóban metszi a nem negatív vektorok P halmazát. C legyen a K-ból a díjmentes lomtalanítás feltételével kapható kifizetések halmaza, vagyis $C \stackrel{\circ}{=} K - P$. Mivel a feltevés szerint a valószínűségi modell véges sok kimenetet tartalmaz, ezért a P egy véges dimenziós tér nem negatív vektorainak halmaza, így egy véges kúp. A K egy lineáris altér, így a C és a K halmazok véges kúpok, így a K és C zárt halmazt alkotnak. Nyilvánvaló, hogy a $K \cap P = \{0\}$ és a $C \cap P = \{0\}$ feltételek ekvivalensek.

A nincsen arbitrázs feltétel

A nincsen arbitrázs duális formában való megfogalmazása a következő:

Theorem (Az eszközárazás alaptétele)

Valamely S eszközök által definiált piacon pontosan akkor nem létezik arbitrázs, ha az S rendelkezik ekvivalens martingálmértékkel, vagyis van olyan $\mathbf{Q}$ mérték, amely ekvivalens a $\mathbf{P}$-vel, és amely alatt az S martingál.

Másképpen az S-et leíró véges fa leveleire, és visszafelé való indukcióval az egyes elágazási pontokba, írhatók olyan pozitív, egyre összegződő számok, hogy minden elágazási pontban az S értéke éppen az elágazási pontból kiinduló ágak súlyozott közepe..

A tétel bizonyítása dualitási tétellel

Az itt bemutatott bizonyítás a lehetséges bizonyítások közül talán a legegyszerűbb és a véges kúpok közismert elméletére támaszkodik. A bizonyítás egyedül érdekes része az, hogy standard első éves lineáris algebrára épül. A tétel általánosításai azonban a modern funkcionálanalízis kifejezetten nehéz részeit használják. A nehézségek azonban a folytonos időhorizont használatából erednek. A bizonyításra rátérve, valamely V véges kúp esetén a szokásos módon jelölje V^p a V negatív polárisát, vagyis

$$V^p \stackrel{\circ}{=} \{u \mid (u, v) \leq 0, \text{ ha } v \in V\}.$$

A tétel bizonyítása dualitási tétellel

A nincsen arbitrázs feltétel szerint $C \cap P = \{0\}$. Ha E jelöli az összes vektorok, vagyis az összes valószínűségi változók, halmazát, akkor

$$E = \{0\}^p = (C \cap P)^p = C^p + P^p \stackrel{\circ}{=} C^p - P,$$

ugyanis $P^p = -P$. Mivel $0 \in P$, ezért a C^p triviálisan tartalmaz egy M pozitív elemet. Megmutatjuk, hogy normalizálás után az M egy ekvivalens martingálmérték. Pontosabban megmutatjuk, hogy a C^p minden nem nulla eleme normalizálás után egy martingálmértéket definiál és fordítva a martingálmértékek mindegyike eleme a C^p kúpnak.

A tétel bizonyítása dualitási tétellel

Ez utóbbi indoklása egyszerű: Ha $\mathbf{Q}$ egy martingálmérték és

$$f \triangleq k - z \triangleq \sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\,\theta(t) - z \in C$$

tetszőleges, akkor a szokásos módon eljárva, felhasználva, hogy diszkrét időhorizonton az integrálható martingáltranszformációk valódi martingálok

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(f) &\triangleq \mathbf{M}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\,\theta(t) - z\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \Delta S(t)\,\theta(t)\right) = \\ &= \sum_{t=1}^{T} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\Delta S(t) \mid \mathcal{F}_t)\,\theta(t)\right) = 0,\end{aligned}$$

így $\mathbf{Q} \in C^p$. Megfordítva, ha $\mathbf{Q} \in C^p$, akkor a $\mathbf{Q}$ mértéket megadó vektor nyilván merőleges a K altérre. Mivel $-P \subseteq C$ ezért $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$. Ha $\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{Q}$ normalizálás után tekinthető valószínűségi mértéknek.

A tétel bizonyítása dualitási tétellel

Nyilván minden $F \in \mathcal{F}_{t-1}$ esetén a $\chi_F (S(t) - S(t-1)) \in K$, ezért

$$\int_F S(t) - S(t-1) \, d\mathbf{Q} = 0,$$

amiből a feltételes várható érték definíciója miatt
$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} (S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = S(t-1)$, vagyis az S valóban martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

A tétel bizonyítása dualitási tétellel

A bizonyításból azonnal látszik a következő:

Corollary

Ha nincsen arbitrázs, akkor $\mathrm{con}(\mathbb{M}) = C^p$. *Ilyenkor az ekvivalens martingálmértékek* $\mathbb{M} \cap \mathbb{P}$ *halmaza a* C^p *és a egységszimplex metszetének azon elemei, amelyek nem esnek a nem negatív vektorok kúpjának határára. Nyilvánvalóan mivel* $\mathbb{M} \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$, *ezért* $\mathbb{M} = \mathrm{cl}(\mathbb{M} \cap \mathbb{P})$.

A (1) és (2) feladatok azonossága az előző dualitási tétel egyszerű következménye.

Theorem

A korábban definiált első és második feladatok ekvivalensek.

A második feladat lehetséges megoldásainak halmaza éppen az

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(f - w_0\right) \leq 0, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{M}$$

halmaz. Nyilvánvaló módon ez ekvivalens a

$$\left(\mathbf{Q}, f - w_0\right) \triangleq \sum_k q_k \left(f_k - w_0\right) \leq 0, \quad \mathbf{Q} \in \operatorname{con}\left(\mathbb{M}\right)$$

feltétellel. Mivel az előző következmény miatt $\operatorname{con}(\mathbb{M}) = C^p$, ezért $f - w_0 \in C^{pp}$. Mivel a C zárt konvex kúp, ezért $C^{pp} = C$, így $f - w_0 \in C$, vagy ami ugyanaz, $f \in w_0 + C$. Mivel az u szigorú monotonitás miatt az első feladatban az optimumok szempontjából egyenlőtlenség is írható, a második feladat minden lehetséges megoldása lehetséges megoldása az elsőnek is. A fordított irányú tartalmazás indoklása nyilvánvaló.

A feladat megoldása

A haszonmaximalizációs feladat megoldását a Lagrange-multiplikátor módszer segítségével szeretnénk megadni. A feladat második megfogalmazása majdnem alkalmas a módszer alkalmazására, az egyetlen gond, hogy a feltételi halmazt definiáló egyenlőtlenségek száma végtelen. A Lagrange-multiplikátor módszer használatához vegyük észre, hogy az $\mathbb{M}$ éppen a C^p kúp és az egységszimplex metszete. Mivel a C egy véges kúp, ezért a C^p polárisa is egy véges kúp, így az $\mathbb{M}$ egy korlátos poliéder, így az $\mathbb{M}$ az extremális pontjainak konvex kombinációja. Világos, hogy a második feladatban elegendő ezekre az extremális pontokra megkövetelni az egyenlőtlenség teljesülését. Jelölje tehát $\{\mathbf{Q}_1, ...\mathbf{Q}_M\}$ az $\mathbb{M}$ extremális pontjainak halmazát. Jelöljük az egyes kimenetelek $\mathbf{P}$ szerinti valószínűségeit p_n-nel, a fenti $\{\mathbf{Q}_1, ...\mathbf{Q}_M\}$ halmaz egy $\mathbf{Q}_m$ vektorának elemeit pedig q_n^m-nel.

Ekkor a fenti (2) maximumprobléma Lagrange-függvénye

$$\begin{aligned} L(f_1, \ldots f_N, \eta_1, \ldots \eta_M) &= \sum_{n=1}^{N} p_n u(f_n) - \sum_{m=1}^{M} \eta_m \left(\sum_{n=1}^{N} q_n^m f_n - w_0 \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n \left(u(f_n) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m f_n}{p_n} \right) + \sum_{m=1}^{M} \eta_m w_0 . \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy mivel a feltételek lineárisak a célfüggvényhez tartozó szorzó választható nullától különbözőnek és mivel a célfüggvény konkáv ezért a feltételekhez tartozó együtthatókat negatívnak választottuk.

A Lagrange-függvény

Mivel a feltételi halmazok egyenlőtlenségek, ezért $\eta_m \geq 0$. Írjuk fel a feladatra a Kuhn–Tucker feltételeket! A Lagrange-multiplikátor módszer szerint alkalmas multiplikátorok esetén az L feltétel nélküli maximuma éppen megegyezik az eredeti függvény feltételes maximumával. A Lagrange-függvény stacionárius pontját felírva, felhasználva, hogy az u értelmezési tartománya nyílt, így a stacionárius pontban a derivált nulla

$$\frac{\partial L}{\partial f_n} = p_n \left(u'\left(\widehat{f}_n\right) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m}{p_n} \right) = 0.$$

Mivel a feltétel szerint minden n-re $p_n > 0$, ezért

$$u'(f_n) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\eta_m q_n^m}{p_n}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $y \mathrel{\hat{=}} \eta_1 + \ldots + \eta_M$. Ha $y = 0$, akkor az összes η_m is nulla. Ilyenkor az optimum szempontjából a feltételek mindegyike irreleváns, vagyis a feltételes optimum megegyezik a globális optimummal. De az u függvényre tett feltételek miatt a feltétel nélküli optimum nem létezik[1], így az $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(u(f))$ függvénynek nincsen

A martingálmérték és a multiplikátorok kapcsolata

Így az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $y > 0$. Legyen $\mu_m \circeq \eta_m \backslash y$, $\mu \circeq (\mu_1, ...\mu_M)$ valamint

$$\mathbf{Q} \circeq \sum_{m=1}^{M} \mu_m \mathbf{Q}_m. \tag{3}$$

A definícióból evidens, hogy $\mathbf{Q}$ éppen az extremális pontok egy alkalmas konvex kombinációja[2], így $\mathbf{Q} \circeq (q_n) \in \mathbb{M}$. Az optimum feltétele tehát

$$u'(f_n) = y \frac{q_n}{p_n}.$$

Vegyük észre, hogy a q_n / p_n hányados éppen a $d\mathbf{Q} / d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym derivált értéke az n-edik kimenetelen, így Lagrange-függvény stacionárius pontjára vonatkozó feltétel éppen

$$u'\left(\widehat{f}\right) = y \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

[2] A μ_m számok nem negatívak és az összegük egy.

A martingálmérték és a multiplikátorok

Egyensúlyi állapotban a kereslet megegyezik a kínálattal. Ha a keresletet az u hasznossági függvény „generálja”, akkor a mértékcsere éppen azt a $\mathbf{Q}$ mértéket adja, amelyre a Radon–Nikodym derivált arányos a határhasznokkal. Ennek megfelelően nem teljes piacon a hasznossági függvények egyértelműen kijelölik a martingálmértéket. Teljes piacon a hozzárendelés egyértelmű, vagyis ilyenkor a martingálmérték egyértelműen meghatározza az optimális fogyasztói döntést, vagyis a keresletet. De általános esetben a martingálmértékek által hordozott információ az egyensúlyi árakra nézve nem bír releváns tartalommal.

Megjegyzések

Az elmondottak azért lényegesek, mert a szokásos matematikai pénzügyi modellek azt sugalják, hogy a pénzügyi piacokon a származtatott termékek ára megmondható olyan kvázi-megfigyelhető adatok alapján mint a volatilitás vagy a kamatláb. További félrevezető momentum, hogy a martingálmértékről nem látszik közvetlenül, hogy szoros rokonságban van a klasszikus közgazdasági-matematikai elmélet duális változóival. A pénzügyi irodalomban a mértékcserét olyan speciális tételekkel mint a Girszanov-tétel szokás megadni. Nem evidens azonban az, hogy ez a sajátos megközelítés csak a folytonos időhorizont miatt szükséges, ugyanis folytonos időhorizonton a dualitás technikája jóval bonyolultabb, mint az általunk tárgyalt véges esetben.

Megjegyzések

Vagyis sokkal inkább a matematikai háttér és eszköztár, mint a tényleges pénzügyi probléma miatt szükséges a tételre hivatkozni. Folytonos időhorizonton a technikai nehézségek elkerülése céljából érdemes egy speciális, ám félrevezető kerülő utat választani. A Girszanov-tétel használata azért félrevezető, mert egyrészt némiképpen misztikus, és ezért a problémát mélyebbnek tünteti fel, mint amilyen az valójában, másrészt azt sugalja, mintha a pénzügyi elmélet más lenne, mint a standard közgazdasági elmélet. A sokat hangoztatott tudományos áttörés, miszerint a drift tagnak a származtatott termékek árazásában nincsen szerepe éppen azt jelenti, hogy a kockázati preferenciák nem játszanak ilyenkor szerepet.

Megjegyzések

Még annyira sem, hogy az egyébként megfigyelhető alaptermeki hozamoknak sincsen szerepe a származtatott termék árazása során. Döbbenetes tudományos felfedezés! Ugyanakkor ez a következtetés nem a sokat hangsúlyozott nincsen arbitrázs feltétel következménye Akárhogyan is van, az impicit üzenet világos, bár rendkívül veszélyes és hamis: A derivatív üzletek területén lehet kockázat nélkül kockázatot vállalni!