A modern valószínűségszámítás eszközei
Tóth Imre Péter
1. feladatsor

1. Keressünk meg minden olyan folytonos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, ami forgatás-invariáns és szorzat alakú. Vagyis, vany olyan $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ és $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$-re
$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = u(x)u(y).$$

2. Használjuk az $\frac{y^2}{2} := a(x - m)^2$ integrál-helyettesítést annak megmutatására, hogy
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-m)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1}$$
amikor $m \in \mathbb{R}$ és $0 < a \in \mathbb{R}$. Óráról tudjuk, hogy az integrál értéke $\sqrt{2\pi}$ amikor $m = 0$ és $a = \frac{1}{2}$.

3. Legyen $f(x_1, \ldots, x_d) = e^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_d^2}{2}}$, és legyen $V = \int_{\mathbb{R}^d} f(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x}$.
   - Számoljuk ki V-t, kihasználva, hogy szorzat alakú:
   $$f(x_1, \ldots, x_d) = e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x_2^2}{2}} \cdot \cdots \cdot e^{-\frac{x_d^2}{2}}.$$
   - Számoljuk ki V-t egyváltozós integrálként, polár koordinátás helyettesítéssel.
   - A két eredmény összevetésével lássuk be, hogy
   $$c_d = \frac{\sqrt{2\pi}^d}{\int_0^\infty r^{d-1} e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r}.$$

4. Számoljuk ki $A_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$ -et, minden $n = 0, 1, 2, \ldots$-re.

5. Legyen $B_d \subset \mathbb{R}^d$ a *tömör* egységgömb (golyó) R^d-ben, vagyis
$$B_d := \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \middle| x_1^2 + \cdots + x_d^2 \le 1\right\}.$$
(v.ö. a gömb definíciójával – itt egyenlőtlenség van.) Legyen b_d a d-dimenziós térfogata B_d-nek. Számítsuk ki b_d-t.
(Tipp: legyen $f(r)$ az r sugarú gömb felszíne, $g(r)$ pedig az r sugaró golyó térfogata.) Győzz meg engem (és magadat), hogy $g'(r) = f(r)$.

6. Bróbáljuk meg kiszámolni az előző feladat-beli b_d-t a nehéz úton: szeleteljük fel a $d+1$-dimenziós golyót d-dimenziósokra, hogy lássuk, hogy
$$b_{d+1} = \int_{-1}^{1} b_d \sqrt{1 - x^2}^d\,\mathrm{d}x.$$

7. $s > 0$-ra legyen
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
az Euler gamma függvény. Ellenőrizzük, hogy $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ minden $s > 0$-ra. Indukcióval ellenőrizzük, hogy $\Gamma(n + 1) = n!$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

8. Számoljuk ki $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$-et. Fejezzük ki $\Gamma(s)$-et faktoriálisokkal, minden félegész $s > 0$-ra.

9. Legyen V egy véletlen vektor $\mathbb{R}^n$-ben n-dimenziós standard Gauss eloszlással, amiazt jelenti, hogy a sűrűségfüggvénye

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{v_1^2 + \cdots + v_n^2}{2}}.$$

Gondoljunk V-re mint egy m tömegű részecske sebesség-vektorára, így eaz energia $E = \frac{m}{2}V^2$. Számoljuk ki az E val-változó eloszlását. (Vagyis: adjuk meg az eloszlásfüggvényt és a sűrűségfüggvényt.)

10. A szabad gáz N darab m tömegű részecskéből áll, amik egy V térfogatú $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ dobozba vannak zárva, és az energiájuk csak a momentumuktól függ:

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m},$$

ahol $\underline{q} \in \Lambda^N$ a helyek vektora, $\underline{p} = (\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ pedig a momentumok vektora.

Az E energiájú mikrokanonikus fázistér $\Omega^{micr}_{N,V,E}$ a $\{H = E\}$ szintfelület $\Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}$-ben. A mikrokanonikus referenciamérték, $\mu^{micr}_{N,V,E}$ egy mérték a fázistéren, aminek a sűrűsége $\frac{1}{|\nabla H|}$ (a felületi térfogatra nézve).

Számoljuk ki a mikrokanonikus állapotösszeget: $Z_{micr}(N, V, E) := \frac{1}{N!}\mu^{micr}_{N,V,E}(\Omega^{micr}_{N,V,E})$.

(Az $\frac{1}{N!}$ szorzó magyarázatát lásd órán.)

11. A szabad gáz N darab m tömegű részecskéből áll, amik egy V térfogatú $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ dobozba vannak zárva, és az energiájuk csak a momentumuktól függ:

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m},$$

ahol $\underline{q} \in \Lambda^N$ a helyek vektora, $\underline{p} = (\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ pedig a momentumok vektora.

A kanonikus fázistér $\Omega^{can}_{N,V} = \Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}$. A β hőmérsékletű kanonikus eloszlás $\mu^{micr}_{N,V,\beta}$ egy valószínűségi mérték a fázistéren, aminke a sűrűségfüggvénye $\frac{1}{A_{can}(N,V,\beta)}e^{-\beta H}$ (a térfogatra nézve), ahol $A_{can}(N, V, \beta)$ normalizáló faktor.

Számoljuk ki a kanonikus állapotösszeget: $Z_{micr}(N, V, E) := \frac{1}{N!}A_{can}(N, V, \beta)$.