A modern valószínűségszámítás eszközei
Tóth Imre Péter
2. feladatsor

2.1 Írjuk le az aszimptotikus viselkedését az $I_n := \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}^n \, dx$ integrálnak, amint $n \to \infty$.

2.2 Legyen $f_n(x) = \sqrt{1-x^2}^n$ ($x \in [-1,1]$-re), és legyen $g_n(x) = f_n(a_n x)$, ahol az a_n skálaszorzó alkalmasan van megválasztva, hogy $\int_{\mathbb{R}} g_n$ körülbelül 1 legyen. Keressük meg a $g(x) := lim_{n\to\infty} g_n(x)$ határértéket.

2.3 Legyen a $V = (V_1, \dots, V_n) \in \mathbb{R}^n$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az $(n-1)$-dimenziós $\sqrt{2nE}$ sugarú gömbön (gömbfelületen) $\mathbb{R}^n$-ben. Legyen f_n a sűrűségfüggvénye az első marginálisnak, V_1-nek (ami maga is valószínűségi változó $\mathbb{R}$-en, és persze a sűrűségfüggvénye függ n-től). Számoljuk ki $f_n(x)$-et minden n-re. Számoljuk ki az $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határértéket.

2.4 *[DeMoivre-Laplace Centrális Határeloszlás Tétel]* Feldobunk egy hamis érmét (amin a fej valószínűsége valami $p \in (0,1)$) n-szer függetlenül. Legyen $q = 1-p$. Legyen X a dobott fejek száma. Így X binomiális eloszlású n és p paraméterekkel, vagyis

$$\mathbb{P}(X=k) = Bin(k;n,p) := \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k = 0,1,\dots,n\text{-re.}$$

Ismert, hogy X várható értéke $\mathbb{E}X = np$, szórása pedig $DX = \sqrt{VarX} = \sqrt{npq}$, ezért legyen $Y := \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ az X standardizált változata (aminek immár a várható értéke 0 és a szórása 1). Persze Y még mindig egy diszkrét valószínűségi változó, ami egy olyan rácson vesz fel értékeket, ahol a szomszédos pontok távolsága $\frac{1}{\sqrt{npq}}$.

Rögzítsük $x \in \mathbb{R}$-et, és válasszuk $k \in \mathbb{Z}$-t úgy, hogy $x \approx \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ legyen, amennyire csak lehet, vagyis k az $np + x\sqrt{npq}$ kerekítve a legközelebbi egészre. Legyen

$$f_n(x) := \frac{\mathbb{P}(Y = \frac{k-np}{\sqrt{npq}})}{\frac{1}{\sqrt{npq}}} = \sqrt{npq}\mathbb{P}(X=k)$$

a logikus tipp az Y "közelítő sűrűségfüggvényére" x-ben.

Számoljuk ki az $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határértéket.

(Tipp: Jó ötlet kihasználni, hogy $\frac{k}{np} \to 1$ és $\frac{n-k}{nq} \to 1$, ahol ez elég. Viszont, amikor ezek magas hatványait számoljuk, az fog kelleni, hogy $\frac{k}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}} + O(\frac{1}{n})$ és $\frac{n-k}{np} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}} + O(\frac{1}{n})$.)

2.5 *[Szabad gáz termodinamikai határesete, mikrokanonikus változat]* A szabad gáz mikrokanonikus leírásában a rendszer (mikrokanonikus) *entrópiája*

$$S_{micr}(N,V,E) = \log Z_{micr}(N,V,E),$$

ahol Z_{micr} a mikrokanonikus állapotösszeg (lásd az 1.10 feladatot). Tartsunk a rendszer méretével végtelenhez úgy, hogy közben a sűrűség és az energiasűrűség állandó marad: $N \to \infty$, $V \to \infty$ és $E \to \infty$, de $\frac{N}{V} = \rho$ és $\frac{E}{V} = e$ konstansok. Számoljuk ki az entrópia-sűrűség határértékét:

$$s_{micr}(\rho, e) := \lim_{N\to\infty, V\to\infty, E\to\infty, \frac{N}{V}=\rho, \frac{E}{V}=e} \frac{S_{micr}(N,V,E)}{V}.$$

2.6 *[Szabad gáz termodinamikai határesete, kanonikus változat]* A szabad gáz kanonikus leírásában a rendszer (kanonikus) *entrópiája*

$$S_{can}(N, V, \beta) = \frac{3N}{2} + \log Z_{can}(N, V, \beta),$$

ahol Z_{can} a kanonikus állapotösszeg (lásd az 1.11 feladatot). Tartsunk a rendszer méretével végtelenhez úgy, hogy közben a sűrűség és a hőmérséklet állandó marad: $N \to \infty$ és $V \to \infty$, de $\frac{N}{V} = \rho$ és β konstansok. Számoljuk ki az entrópia-sűrűség határértékét:

$$s_{can}(\rho, \beta) := \lim_{N\to\infty, V\to\infty, \frac{N}{V}=\rho} \frac{S_{can}(N, V, \beta)}{V}.$$