A modern valószínűségszámítás eszközei
Tóth Imre Péter
3. feladatsor

3.1 Legyen V belső szorzat tér $\mathbb{R}$ felett, és legyen $f : V \to \mathbb{R}$ lineáris forma. Legyen $E := \{y \in V \mid f(y) = 0\}$ az f nulltere. Tegyük fel, hogy $f(a) = 1$, $c \in E$ és $a-c$ merőleges E-re, vagyis $(a-c)y = 0$ minden $y \in E$-re. Ezek után minden $x \in V$-re keressük meg azt a $\lambda \in \mathbb{R}$-et, amire $x_1 := x - \lambda(a-c) \in E$. Ennek segítségével keressük meg az összefüggést $f(x)$ és $(a-c)x$ között.

3.2 Reprezentáljuk az alábbi $f : V \to \mathbb{R}$ függvényeket mint fix vektorral való szorzást, amikor csak ez lehetséges a Riesz reprezentációs tétel szerint.

a.) $V = \mathbb{R}^{10}$ a szokásos belső szorzással, $f((x_1, \dots, x_{10})) := x_5$ (kiértékelés 5-ben)

b.) $V = \mathbb{R}^{10}$ a szokásos belső szorzással, $f((x_1, \dots, x_{10})) := x_6 - x_5$ (diszkrét derivált 5-ben).

c.) $V = \mathbb{R}^{10}$ a szokásos belső szorzással, $f((x_1, \dots, x_{10})) := x_6 - 2x_5 + x_4$ (diszkrét második derivált 5-ben).

d.) $V = l^2 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} x^2(i) < \infty\}$, az $x \cdot y := \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$ belső szorzással; $f(x) := \sum_{i=1}^{100} x(i)$.

e.) $V = l^2 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} x^2(i) < \infty\}$, az $x \cdot y := \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$ belső szorzással; $f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x(i)$.

f.) $V = l^2 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} x^2(i) < \infty\}$, az $x \cdot y := \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$ belső szorzással; $f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x^2(i)$.

g.) $V = L^2([0,1]) := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty\}$, az $x \cdot y := \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ belső szorzással; $f(x) := x(\frac{1}{2})$ (kiértékelés $\frac{1}{2}$-ben).

h.) $V = L^2([0,1]) := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty\}$, az $x \cdot y := \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ belső szorzással; $f(x) := x'(\frac{1}{2})$ (derivált $\frac{1}{2}$-ben).

i.) $V = L^2([0,1]) := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty\}$, az $x \cdot y := \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ belső szorzással; $f(x) := \int_{0.2}^{0.7} x(t)\,\mathrm{d}t$.

j.) $V = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty,\ f \text{ is deriválható}\}$, az $x \cdot y := \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ belső szorzással; $f(x) := x'(\frac{1}{2})$.

k.) $V = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty,\ f \text{ is folytonos}\}$, az $x \cdot y := \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ belső szorzással; $f(x) := x(\frac{1}{2})$.

l.) $V = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty,\ f \text{ is folytonos}\}$, az $x \cdot y := \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ belső szorzással; $f(x) := \int_{0.2}^{0.7} x(t)\,\mathrm{d}t$.

3.3 Definiáljuk a σ-algebrát a következőképpen::

Definition 1 *Egy nem üres Ω halmazra az Ω részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ családját (vagyis $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$, ahol $2^{\Omega} := \{A : A \subset \Omega\}$ az Ω hatványhalmaza) σ-algebrának nevezzük Ω felett, ha*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- *ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $A^C := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ (vagyis $\mathcal{F}$ zárt a komplementer-képzésre)*
- *ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, akkor $(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{F}$ (vagyis $\mathcal{F}$ zárt a megszámlálható unió-képzésre).*

Mutassuk meg a definíció alapján, hogy a σ-algebra zárt a megszámlálható metszet-képzésre, valamint a véges unió- és metszet-képzésre.

3.4 (a) Feldobunk egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége $0 \le p \le 1$. Legyen a ξ valószínűségi változó a fej dobás indikátora, vagyis

$$\xi := \begin{cases} 0, & \text{ha fejet dobtunk} \\ 1, & \text{ha írást} \end{cases} .$$

i. Jellemezzük ξ eloszlását (ami a p paraméterű Bernoulli eloszlás) a "klasszikus" módon, a lehetséges értékek és valószínűségeik felsorolásával,

ii. valamint úgy is, mint mértéket $\mathbb{R}$-en, megadva $\mathbb{P}(\xi \in B)$-t minden $B \subset \mathbb{R}$ Borel halmazra.

iii. Számoljuk ki ξ várható értékét.

(b) Feldobjuk az előbbi hamis érmét n-szer, és jelöljük X-szel a dobott *fejek számát.*

i. Jellemezzük X eloszlását (ami az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás) a lehetséges értékek és valószínűségeik felsorolásával,

ii. valamint úgy is, mint mértéket $\mathbb{R}$-en, megadva $\mathbb{P}(X \in B)$-t minden $B \subset \mathbb{R}$ Borel halmazra.

iii. Számoljuk ki X várható értékét integrálással (ami jelen esetben igazából összeadás) az eloszlás segítségével,

iv. és úgy is, hogy észrevesszük, hogy $X = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, ahol ξ_i az i-edik dobás során a fej indikátora, és kihasználjuk a várható érték linearitását.

3.5 Az $0.a_1a_2a_3\ldots$ *ternáris* szám a tizedestört megfelelője, csak 3-as számrendszerben. Vagyis az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatra, ahol $a_n \in \{0, 1, 2\}$, definíció szerint

$$0.a_1a_2a_3\cdots := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

Konstruáljuk meg egy X véletlen valós szám ternáris tört alakját szabályos érmedobások sorozatával úgy, hogy az 1 számjegyet kizárjuk. Vagyis

$$a_n := \begin{cases} 0, & \text{ha az } n\text{-edik dobás írás} \\ 2, & \text{ha az } n\text{-edik dobás fej} \end{cases} ,$$

és legyen $X = 0.a_1a_2a_3\ldots$ (ternáris). Így X egy "egyenletesen" választott véletlen pont a híres C *középső harmad Cantor halmaz*ból, aminek a definíciója

$$C := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \, , \; a_n \in \{0, 2\} \; (n = 1, 2, \ldots) \right\}.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) X eloszlása minden pontnak nulla súlyt ad – azaz $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. (Következés képpen X eloszlásfüggvénye folytonos.)

(b) X eloszlása nem abszolút folytonos ($\mathbb{R}$-en a Lebesgue mértékre nézve).

3.6 *A mérték folytonossága*

(a) Bizonyítsuk be a következő tételt:

Theorem 1 *(A mérték folytonossága)*

i. Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér és $A_1, A_2, \ldots$ mérhető halmazok egy növekvő sorozata (vagyis $A_i \in \mathcal{F}$ és $A_i \subset A_{i+1}$ minden i-re), akkor $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ (és az egyenlet mindkét oldala értelmes).

ii. *Ha* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *mértéktér,* $A_1, A_2, \ldots$ *mérhető halmazok egy csökkenő sorozata (vagyis* $A_i \in \mathcal{F}$ *és* $A_i \supset A_{i+1}$ *minden* i*-re), valamint* $\mu(A_1) < \infty$*, akkor* $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ *(és az egyenlet mindkét oldala értelmes).*

(b) Mutassuk meg, hogy a második állításban a $\mu(A_1) < \infty$ feltételre szükség van, egy ellenpélda konstruálásával amikor a feltétel nem teljesül.

3.7 *A várható érték linearitásának hasznossága.* Egy épületben 10 emelet van, nem beleértve a földszintet. A földszinten 10 ember beszáll a liftbe, és mindegyik választ egy cél-emeletet, ahol majd kiszáll, egyenletesen a 10 emelet közül, függetlenül a többiektől. Legyen X az *olyan* emeletek száma, ahol a lift megáll – vagyis azon emeletek száma, amit legalább egy ember választ. Számoljuk ki X várható értékét és szórását. *(tipp: Először győződjünk meg róla, hogy* X *eloszlását kiszámolni nehéz. Keressünk módot a várható érték és a szórás kiszámolására az eloszlás meghatározása nélkül.)*