A modern valószínűségszámítás eszközei
Tóth Imre Péter
4. feladatsor

4.1 Legyen $X = [0, 1]$ és legyen μ a Lebesgue mérték X-en. Legyen $f(x) = x^2$. Írjuk le az $f_*\mu$ mértéket.

4.2 Legyen $X = \{(a_1, a_2, \dots) \,|\, a_k \in \{0, 1\}$ minden k-ra$\}$ a $\{0, 1\}$ értékű sorozatok halmaza. Legyen μ az a mérték X-en, amire

$$\mu(\{(a_1, a_2, \dots) \in X \,|\, a_1 = b_1, \dots, a_N = b_N\}) = \frac{1}{2^N}$$

minden $b_1, \dots, b_N \in \{0, 1\}$-re. Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f(a_1, a_2, \dots) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}.$$

Írjuk le az $f_*\mu$ mértéket.

4.3 Tekintsük a következő (X, μ) mértéktereket:

I. $X = [0, 1]$, μ a Lebesgue mérték.
II. $X = [0, \infty)$, μ a Lebesgue mérték.
III. $X = \{1, 2 \dots, N\}$, μ a számláló mérték.
IV. $X = \{1, 2 \dots\}$, μ a számláló mérték.

Mutassunk példát olyan $f_1, f_2, \dots$ és f függvényekre X-ből $\mathbb{R}$-be, hogy f_n konvergál f-hez

a.) majdnem mindenütt, de L^1-ben nem,
b.) L^1-ben, de nem majdnem mindenütt,
c.) L^2-ben, de L^1-ben nem,

4.4 Az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény, amire $\Psi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. Számoljuk ki a karakterisztikus függvényét

(a) A $B(p)$ Bernoulli eloszlásnak.
(b) A p paraméterű "pesszimista geometriai" eloszlásnak, vagyis azon $\{0, 1, 2 \dots\}$-en vett μ eloszlásnak, aminek súlyai $\mu(\{k\}) = (1 - p)p^k$ $(k = 0, 1, 2 \dots)$.
(c) A p paraméterű "optimista geometriai" eloszlásnak, vagyis azon $\{1, 2 \dots\}$-en vett ν eloszlásnak, aminek súlyai $\nu(\{k\}) = (1 - p)p^{k-1}$ $(k = 1, 2 \dots)$.
(d) A λ paraméterű Poisson eloszlásnak, vagyis azon $\{0, 1, 2 \dots\}$-en vett η eloszlásnak, aminek súlyai $\eta(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k = 0, 1, 2 \dots)$.
(e) A λ paraméterű exponenciális eloszlásnak, vagyis azon eloszlásnak $\mathbb{R}$-en, aminek (Lebesgue mértékre vonatkozó) sűrűségfüggvénye

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ ha } x > 0 \\ 0, \text{ ha nem} \end{cases}.$$

4.5 Számoljuk ki az $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ normális eloszlás karakterisztikus függvényét. (Emlékezzünk a régi definícióra: $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ az az eloszlás $\mathbb{R}$-en, aminek sűrűségfüggvénye (Lebesgue mértékre nézve)

$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Megspórolhatunk némi papírmunkát, ha csak $\mathcal{N}(0,1)$-re végezzük el a számolást, majd erre vezetjük vissza az általános esetet a normális eloszlások közötti összefüggés alapján. Ki szabad és kell használni, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{m,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

minden m-re és σ-ra.

4.6 *Dominált konvergencia és a karakterisztikus függvény folytonos differenciálhatósága.* A Lebesgue dominált konvergencia tétel a következő:

Theorem 1 (dominált konvergencia) *Legyen $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ mértéktér és legyenek $f_1, f_2, \ldots$ mérhető valós értékű függvények Ω-n, amik pontonként konvergálnak egy határfüggvényhez, μ-majdnem mindenütt. (Vagyis, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ minden $x \in \Omega$-ra, kivéve esetleg x-eknek egy nulla μ-mértékű halmazát.) Tegyük fel továbbá, hogy az f_n-eknek van egy közös* integrálható majoránsa*: van egy olyan $g : \Omega \to \mathbb{R}$, hogy $|f_n(x)| \le g(x)$ minden $x \in \Omega$-ra és $n \in \mathbb{N}$-re, és $\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Ekkor (minden f_n és f is integrálható és)*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu.$$

Ennek a tételnek a felhasználásával bizonyítsuk be az alábbi tételt:

Theorem 2 (a karakterisztikus függvény differenciálhatósága) *Legyen X valós értékű valószínűségi változó, $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ a karakterisztikus függvénye és $n \in \mathbb{N}$. Ha X n-edik momentuma létezik és véges (vagyis $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$), akkor ψ n-szer folytonosan differenciálható és*

$$\psi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k), \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$$

4.7 *Integrál és határérték felcserélhetősége.* Tekintsük az $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ és $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatok pontonkénti határértékét és az integráljaik határértékét. Van olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ és $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n(x) \to f(x)$ és $g_n(x) \to g(x)$ Lebesgue majdnem minden $x \in [0,1]$-re? Mennyi $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)$ és $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 g_n(x)dx\right)$? Teljesülnek a dominált és a monoton konvergencia tétel, valamint a Fatou lemma feltételei? Ha igen, mit állítanak ezek a tételek ezekben a konkrét esetekben?

(a)

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{ha } 0 \le x < 1/n, \\ 2n - n^2 x & \text{ha } 1/n \le x \le 2/n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) Írjuk fel n-et $n = 2^k + l$ alakban, ahol $k = 0,1,2\ldots$ és $l = 0,1,\ldots,2^k - 1$ (ez minden n-re egyértelműen megtehető). Legyen ezután

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{l}{2^k} \le x < \frac{l+1}{2^k}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4.8 *Integrálok felcserélhetősége.* Tekintsük a következő $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 < x,\ 0 < y \text{ és } 0 \le x - y \le 1, \\ -1 & \text{ha} \quad 0 < x,\ 0 < y \text{ és } 0 < y - x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számoljuk ki $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \right) dy$-t és $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \right) dx$-t. Mi a helyzet a Fubini tétellel?

4.9 A valós $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számokra definiáljuk a $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen szorzatot mint

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

amikor ez a határérték létezik.

Legyen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ olyan, hogy $0 \le p_k < 1$ minden k-ra. Mutassuk meg, hogy $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-p_k) > 0$ akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$.

(Tipp: becsüljük $(1-p)$ logaritmusát p-vel.)

4.10 Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, amikre

$$\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X_n = 0$ minden n-re, de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots X_n}{n} = -1$$

majdnem biztosan.

4.11 Bizonyítsuk be, hogy valószínűségi változók *bármilyen* $X_1, X_2, \ldots$ sorozatára (amik valós értékűek és közös valószínűségi mezőn vannak definiálva) van olyan $c_1, c_2, \ldots$ számsorozat, hogy

$$\frac{X_n}{c_n} \to 0 \text{ majdnem biztosan.}$$

4.12 Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ f.a. eo. valószínűségi változók *Bernoulli*(p) eloszlással valamilyen $p \in (0;1)$-re, de $p \neq \frac{1}{2}$. Legyen $Y := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$. (Ez a sor abszolút konvergens.) Mutassuk meg, hogy Y eloszlása folytonos, de szinguláris a Lebesgue mértékre nézve.