A modern valószínűségszámítás eszközei
Tóth Imre Péter
5. feladatsor

5.1 Legyen $(X, \mathcal{F})$ mérhető tér és legyenek rajta μ és ν σ-véges mértékek. Mutassuk meg, hogy van olyan $X = \dot{\bigcup}_i A_i$ megszámlálható partíció, hogy $\mu(A_i) < \infty$ és $\nu(A_i) < \infty$ minden i-re. Ennek segítségével mutassuk meg, hogy a Radon-Nikodym tétel véges mértékekre vonatkozó speciális esetéből következik az általános tétel (σ-véges mértékekre).

5.2 Legyen λ a Lebesgue mérték és χ a számláló mérték $\mathbb{R}$-en (a Borel σ-algebrával). Mutassuk meg, hogy λ-nak nincs χ-re vonatkozó sűrűségfüggvénye. (Tipp: tekintsük az 1-elemű halmazokat.)

5.3 Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező és legyen $A \in \mathcal{F}$. Definiáljuk $X : \Omega \to \mathbb{R}$-t úgy, hogy $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$ és legyen $\mu = X_*\mathbb{P}$ az X eloszlása.Mutassuk meg, hogy μ is abszolút folytonos a számláló mértékre nézve, és azt is, hogy van sűrűségfüggvénye. Mi a sűrűségfüggvény?

5.4 Legyen X diszkrét valószínűségi változó, és legyen μ az eloszlása. Adjuk meg μ sűrűségfüggvényét a számláló mértékre nézve.

5.5 Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ integrálható és legyen $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ egy rész-σ-algebra. Definiáljuk $\nu : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^+$-t úgy, hogy $\nu(A) := \int_A X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ (amikor $A \in \mathcal{G}$). Ellenőrizzük le, hogy ν mérték $(\Omega, \mathcal{G})$-n.

5.6 Legyen X nem üres halmaz és legyen $\mathcal{F}_i \subset 2^X$ egy σ-algebra minden $i \in I$-re, ahol I egy indexhalmaz. I tetszőleges lehet (megszámlálhatónál akár sokkal nagyobb), de feltesszük, hogy $I \neq \emptyset$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ is σ-algebra. (Vegyük észre, hogy az $I \neq \emptyset$ feltevés fontos.)

5.7 Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (Borel-)mérhető. Legyen $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ az összes olyan Ω feletti σ-algebrák családja, amire nézve X $\mathcal{G}_i$-mérhető, és legyen $\mathcal{G} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_i$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{G}$ a *legkisebb* σ-algebra, amire nézve X mérhető. (Pontosan milyen értelemben is a legkisebb?)

5.8 Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér, legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$-mérhető, ahol $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra $\mathbb{R}$-en. Legyen $\sigma(X)$ a legkisebb σ-algebra Ω-n, amire nézve X mérhető. (Az előző feladat miatt ez létezik.) Ezt nevezzük az X *által generált σ-algebrának*. Mutassuk meg, hogy

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

5.9 Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér, és legyenek $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ rész-σ-algebrák. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ függetlenek, ha minden $A \in \mathcal{G}_1$ és $B \in \mathcal{G}_2$ független. Mutassuk meg, hogy ha X és Y független valószínűségi változók, akkor $\sigma(X)$ és $\sigma(Y)$ független.

5.10 Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér, és legyenek $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ rész-σ-algebrák. Legyenek X és Y valószínűségi változók, $X \in \mathcal{G}_1$, $Y \in \mathcal{G}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ független, akkor X és Y független.

5.11 Mutassuk meg, hogy ha X egy valószínűségi változó, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető és $Y = f(X)$, akkor $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$. Mutassunk olyan példát, amikor fennáll az egyenlőség, és olyat, amikor nem.

5.12 Mutassuk meg, hogy ha X, Y független valószínűségi változók és $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények, akkor $f(X)$ és $g(Y)$ is függetlenek.

5.13 Mutassuk meg, hogy az $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha az (X, Y) pár (együttes) eloszlása (ami egy valószínűségi mérték $\mathbb{R}^2$-n) az X és Y eloszlásának szorzata.

5.14 Mutassuk meg, hogy ha X és Y függetlenek és integrálhatók, akkor $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

5.15 Mutassuk meg, hogy ha az X valószínűségi változó független a $\mathcal{G}$ σ-algebrától, akkor $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$.

5.16 Legyen $\Omega = \{a, b, c\}$ és legyen rajta $\mathbb{P}$ az egyenletes eloszlás. Legyen $X = \mathbf{1}_{\{c\}}$ és legyen $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$. Számoljuk ki $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$-t.

5.17 Két szabályos dobókockával dobunk. Jelölje X, Y a dobott számokat. Számoljuk ki $\mathbb{E}(X|X+Y)$-t.

5.18 Legyen $\Omega = [0, 1]^2$ és legyen $\mathbb{P}$ a Lebesgue mérték Ω-n. Definiáljuk $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$-t úgy, hogy $X(u, v) = u$ és $Y(u, v) = \sqrt{u + v}$. Számoljuk ki $\mathbb{E}(Y|X)$-t.

5.19 Legyenek U és V független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Számoljuk ki $\mathbb{E}(\sqrt{U + V}|U)$-t.

5.20 Legyenek U és V független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Számoljuk ki $\mathbb{E}(U + V|U - V)$-t.

5.21 Legyenek U és V független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Számoljuk ki $\mathbb{E}(\sqrt{U + V}|U - V)$-t.

5.22 Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $U = X + Y$ és $V = 2X - Y$. Számoljuk ki $\mathbb{E}(V|U)$-t. *(Tipp: ha W független U-tól, akkor $\mathbb{E}(W|U) = \mathbb{E}W$. Ha ügyesen választunk $\lambda \in \mathbb{R}$-t, akkor $W := V - \lambda U$ független lesz U-tól. (Mivel U és W együttesen normális, a függetlenség ellenőrzéséhez elég megmutatni, hogy $Cov(U, W) = 0$.) Ezután írjuk V-t $V = \lambda U + W$ alakba.)*