Matematika B4
XI. gyakorlat

2006. május 11.

1. Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(Z = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \cap Y = l - k)$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(Z = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = l - k)$$

Például ha X, Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint:

$$P(\text{dobások összege } = 8) = P(X = 2)P(Y = 6) + P(X = 3)P(Y = 5)+$$
$$P(X = 4)P(Y = 4) + P(X = 5)P(Y = 3) + P(X = 6)P(Y = 2)$$

Ugyanilyen logikával számoltunk a félév elején.
Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, és $Z = X + Y$, akkor Z sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx$$

Feladatok:

1. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0, 1]$-en, és összeadom őket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!
2. Számoljuk ki egy $[0, 2]$-n és egy $[0, 3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.
3. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor ezt másodrendű, λ paraméterű Gamma eloszlásnak nevezzük.)
4. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók különbségének eloszlását! (A számolásnál különböztessük meg, ha λ_1 és λ_2 különbözőek, illetve megegyeznek.)
5. Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!
6. Számoljuk ki 3 db λ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját!
   Útmutatás: Kettőre már kiszámoltuk, konvolváljunk az eredményhez még egy λ paraméterű exponenciális eloszlást.

7. * Számoljuk ki n db λ paraméterű exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! (Használjunk indukciót!)

8. X és Y egymástól független valószínűségi változók, melyek egyenletes eloszlásúak az $[1, 5]$ intervallumon. Vezessük le $X - Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

9. Számoljuk ki $X - Y$ sűrűségfüggvényét, ha

   a) X és Y egymástól független λ paraméterű exponenciális eloszlást követő valószínűségi változók.

   b) X λ paraméterű, Y μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

2. Markov-egyenlőtlenség

Ha X egy nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, akkor tetszőleges $\lambda \in]0, \infty[$ esetén
$P(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.
Feladat:

10. Bizonyítsuk be az egyenlőtlenséget!

3. Csebisev-egyenlőtlenség

Ha X egy olyan valószínűségi változó, melynek második momentuma véges, várható értéke m, szórásnégyzete pedig σ^2, akkor tetszőleges $\lambda \in]0, \infty[$ esetén
$P(|X - m| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$.

4. Nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek második momentuma véges. Ha a $m := \mathbb{E}(X_j)$; $\sigma^2 := D^2(X)$; $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ jelöléseket alkalmazzuk, akkor a Bernoulli egyenlőtlenség szerint

$$P(|\frac{S_n}{n} - m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

és ezért
$\lim\limits_{n \to \infty} P(|\frac{S_n}{n} - m| > \varepsilon) = 0$, tetszőleges ε esetén (nagy számok gyenge törvénye).

Feladatok:

11. Hány érmedobás átlagát kell vennünk ahhoz, hogy legalább 90%-os valószínűséggel 0.49 és 0.51 között legyen az átlag?

12. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik? (Közelítsünk normális eloszlással!)

13. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik kb. 0.5! (Közelítsünk normális eloszlással!)

14. Hány véletlen számot kell generálnunk számítógéppel ($(0, 1)$-en folytonos egyenletes eloszlásúak) ahhoz,

    a) hogy az átlaguk 0.95 valószínűséggel 0.01-nél kisebb hibával közelítse az $1/2$-et?

    b) hogy a négyzetük átlaga 0.95 valószínűséggel 0.01-nél kisebb hibával közelítse az $1/3$-ot?