Matematika B4
V. gyakorlat

2006. március 16.

1. Szórás

Az m várható értékű X valószínűségi változó szórása:
diszkrét esetben: $D(X) = \boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{\sum\limits_k (k-m)^2 \cdot p_k} = \sqrt{\boldsymbol{E}(X^2) - (\boldsymbol{E}X)^2}$.
folytonos esetben: $D(X) = \boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot f(x)dx} = \sqrt{\boldsymbol{E}(X^2) - (\boldsymbol{E}X)^2}$

2. Normális eloszlás

Tény: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.
A standard normális eloszlás
sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty < x < \infty$,
eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ha $-\infty < x < \infty$.
A gyakorlati anyag utolsó lapján található egy táblázat $\Phi(x)$ értékeiről.
Az m várható értékű, σ szórású normális eloszlás a standard normálisból származtatható: $F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$
Független, véges (kis) szórású valószínűségi változók összege nagyon jó közelítéssel normális eloszlásnak vehető.

Feladatok

1. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke? (Az F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel.)

2. Számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését! Melyik a nagyobb?

3. Számítsuk ki az $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó valamely c értéktől vett átlagos eltérésének várható értékét ($\boldsymbol{E}(|X-c|)$), illetve c-től való négyzetes eltérés várható értékét ($\boldsymbol{E}((X-c)^2)$)! Mely c-re lesz az egyik, illetve a másik érték minimális?

4. Mennyi az előző 3 feladatban a következő valószínűségek értéke (m, σ a várható értéket és a szórást jelöli)?

   a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$
   b) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$

5. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

6. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

7. Egy ismerősömmel 7 órakor van találkozóm. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

8. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

   a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$

   b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx$

   c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \varphi(x)dx$

   d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx$

9. Mutassuk meg, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

10. Számítsuk ki a Φ táblázat segítségével a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

    a) $P(X < 1.5)$
    b) $P(X < -2.5)$
    c) $P(X < 1.5)$
    d) $P(X > -2.5)$
    e) $P(-1 < X < 1)$
    f) $P(-2 < X < 2)$
    g) $P(-3 < X < 3)$
    h) $P(0.3 < X < 1.3)$
    i) $P(-0.3 < X < 1.3)$
    j) $P(-1.3 < X < 1.6)$

11. Számítsuk ki a standard normális eloszlás 0.9 és 0.2-kvantilisét!

12. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

13. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasság szórása 9 cm (a magasság normális eloszlásnak tekinthető). Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Mennyi a testmagasság 0.9 és 0.2-kvantilis?

14. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Tételezzük fel, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

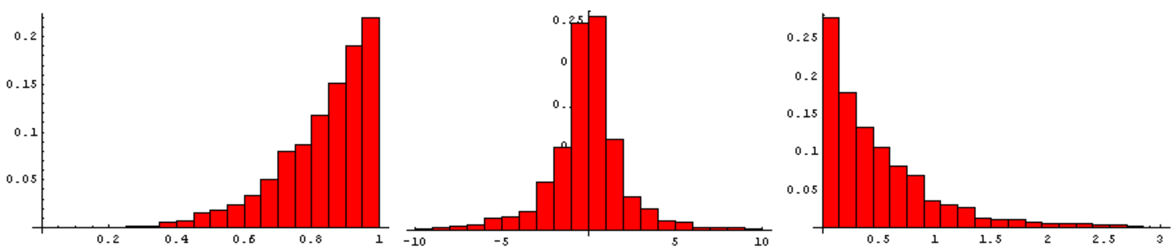
    a) 50 fő alatt?
    b) 80 és 100 fő között lesz?

15. Statisztikát készítek nővérem telefonási szokásairól. Sok havi megfigyelés után azt tapasztalom, hogy havonta átlagosan $4,5$ órát telefonál, a szórás pedig fél óra. Az egyik nagy telekommunikációs cégnél előfizetett egy csomagra, ami keretében havi 5 órát ingyen beszélhet le. Mi a valószínűsége, hogy túllépi az 5 órát, azaz még rá kell fizetnie? (A havi telefonálási időtartalmot tekintsük normális eloszlásúnak.)

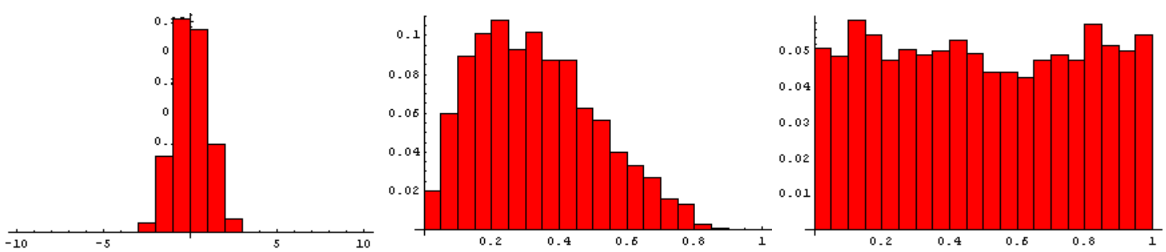
16. Kertemben napraforgót termesztek. Tapasztalatom szerint az átlagos évi termelés 45 kg, és 10 évenként általában egyszer fordul elő, hogy 50 kg-nál több a termelés. Milyen gyakran fordul elő, hogy 37 kg-nál kevesebb a termelés? (Ugyanis ilyenkor ráfizetéses a termelés.)

17. Számítógép segítségével generáltam nevezetes folytonos eloszlás szerinti véletlen számokat. Minden esetben 2000 kísérletet generáltam, és elkészítettem a hisztogramokat. Párosítsuk össze az eloszlásokat a hozzájuk tartozó hisztogrammokkal. (Figyelem: hisztogramból is 8 van!)

    a) $(0, 1)$-en folytonos egyenletes eloszlás
    b) 2 paraméterű exponenciális eloszlás
    c) 0.2 paraméterű exponenciális eloszlás
    d) Arcussinus eloszlás ($(0, 0)$ középpontú, 1 sugarú félköríven egyenletesen választunk pontot, majd merőlegesen levetítjük az átmérőjére, lásd: 3. feladatsor 11. feladat)
    e) Cauchy eloszlás ($(0, 1)$ középpontú, 1 sugarú félköríven egyenletesen választunk pontot. A kör középpontján és a választott ponton fekvő egyenes elmetszi az x tengelyt, ennek a pontnak az eloszlása Cauchy, lásd: 3. feladatsor 12. feladat)
    f) Standard normális eloszlás
    g) 5 pontot egymástól függetlenül folytonos egyenletesen választunk a $(0, 1)$ intervallumon, vegyük a második legkisebb eloszlását (megfelelő paraméterű BÉTA eloszlás)
    h) 5 pontot egymástól függetlenül folytonos egyenletesen választunk a $(0, 1)$ intervallumon, vegyük a legnagyobb eloszlását (megfelelő paraméterű BÉTA eloszlás)

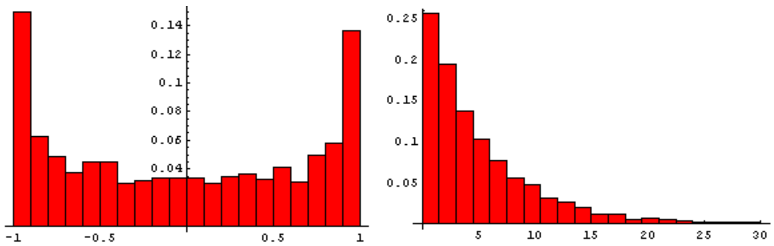


1. ábra.

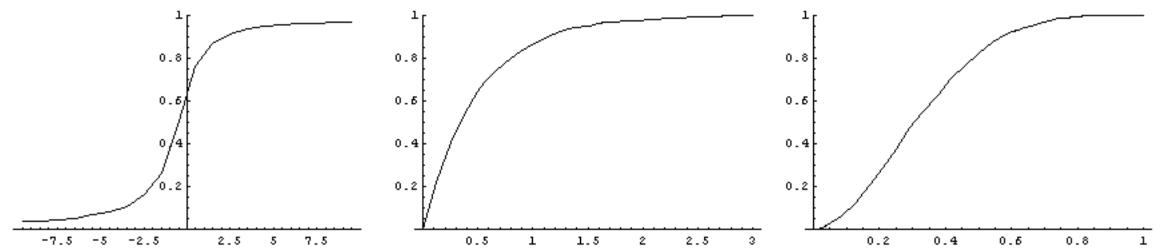


2. ábra.

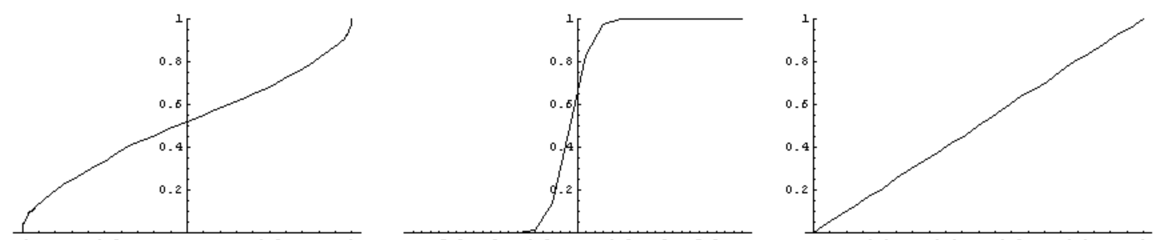
18. Az előző feladat szimulálása során nem csak a hisztogramokat készítettem el, hanem a tapasztalati eloszlásfüggvényt is ($F(x) = (x$-nél kisebb kísérletek száma$)/($az összes kísérletek száma$)$). Ezek lépcsős függvények, csak 200 kísérletnél és ekkora felbontásnál ez már nem látszódik. Párosítsuk össze ezekt az előző feladatban előforduló eloszlásokkal!



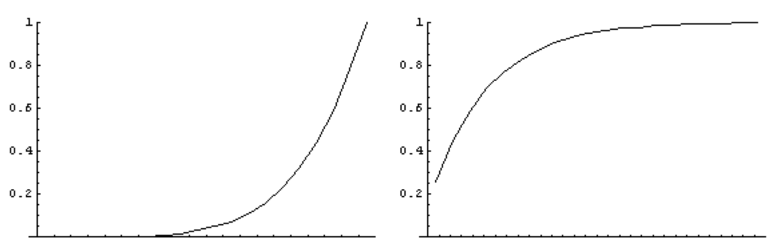
3. ábra.



4. ábra.

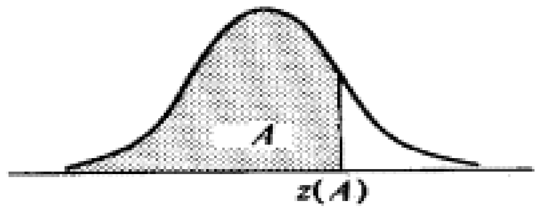


5. ábra.



6. ábra.

Entry is area A under the standard normal curve from $-\infty$ to $z(A)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

7. ábra.