Matematika B4
VIII. gyakorlat

2006. április 6.

1. Feltételes valószínűség

Vizsgálhatjuk egy (A) esemény bekövetkezésének valószínűségét úgy is, hogy ha tudjuk, hogy egy másik (B) esemény bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám talált, és még most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálat valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt. A fenti jelölésnél $P(A|B)$ a feltételes valószínűség. (Olvasva: A valószínűsége feltéve B-t). Számítása:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ és } B)}{P(B)}$$

1. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok $5-5$ lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

2. Egy szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk, ha tudjuk, hogy: párosat dobunk? legalább 3-ast dobunk? legfeljebb 5-öst dobunk?

3. Feldobunk 2 kockát. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?

4. Tegyük fel, hogy azonos eséllyel szülnek az anyák lányt illetve fiút. A kétgyerekes családokat vizsgálva, mennyi annak a valószínűsége, hogy két fiú van, ha tudjuk, hogy van fiú? És mennyi az esélye, hogy van lány is, ha tudjuk, hogy van egy fiú?

5. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

   a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé? ii) betegé? iii) Beteg fiúé?

   b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

   c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

   d) (*) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

2. Szorzási szabály

Feltételes valószínűségek szorzási szabálya (avagy Toronyszabály):

$$P(A_n, A_{n-1}, \ldots A_1) = P(A_n|A_{n-1}, \ldots A_2, A_1) \cdot P(_{An-1}|A_{n-2}, \ldots A_2, A_1) \cdot \ldots P(A_3|A_2, A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$$

6. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat a) Visszatesszük b) Nem tesszük vissza?

7. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány a) Átvészeli a teljes eljárást? b) Az utolsó irtáskor pusztul el? c) Túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

8. Egy dobozban 16 tranzisztor közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett tranzisztor működőképes?

9. Egy valszámvizsgán 30 tétel van ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy a) Csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt? b) Mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!) c) Egyik sem húz ilyen tételt?

3. Teljes valószínűség tétele

Ha $H_n, H_{n-1}, H_{n-2}, \ldots, H_2, H_1$ teljes eseményrendszert alkot (azaz páronként diszjunktak és együtt kiadják a biztos eseményt), A pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(A) = P(A|H_n) \cdot P(H_n) + P(A|H_{n-1}) \cdot P(H_{n-1}) + \ldots P(A|H_1) \cdot P(H_1)$$

10. Egy suli tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a nők 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak hány %-a bukik meg az első vizsgán?

11. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B-nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy a) Az első üzletkötés kedvező lesz? b) Mindkét üzletkötés javunkra válik? c) Lesz köztük rossz és jó üzlet is?

12. Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az 5.-ben ott lesz?

4. Bayes tétel

Ha tudjuk, hogy A már bekövetkezett, mi annak a valószínűsége, hogy ez pontosan H_i eseménnyel valósult meg? (Itt $H_1, H_2, \ldots H_n$ ismételten teljes eseményrendszert alkot.) A definíció szerinti képletet felírva a számlálóban a a feltételes valószínűség, a nevezőben a teljes valószínűség képletét alkalmazva adódik a következő képlet:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A, H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A|H_n) \cdot P(H_n) + \ldots P(A|H_1) \cdot P(H_1)}$$

13. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

14. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az Athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alakalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak gőze sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, és egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2*2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

15. Az igazak városában az emberek 90%-a igazat mond, a hazugok városában az emberek 85%-a hazudik. Mivel lefüggönyözött busszal hoztak ide minket, nem tudjuk melyikben vagyunk. Megkérdezünk egy embert, aki azt mondja, hogy "Ez a hazugok városa." Mi a valószínűsége, hogy igazat mond?

16. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást az ellenséges politikai erők zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

    a) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le?

    b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?

5. Feltételes eloszlások diszkrét esetben

17. Asztalos ismerősöm készített nekem $2, 3, 4, 5, 6$ oldalú szabályos dobókockát. A következő játékot játszom: dobok a 6 oldalú dobókockával, majd a dobott számnak megfelelő oldalú dobókockával dobok újra. Mi a második dobás eloszlása? (Magyarázat: pl. elsőre 3-at dobok, akkor a második dobás $1/3$-$1/3$-$1/3$ valószínűséggel lesz $1, 2, 3$. Ha az elsőre 1-et dobok, akkor a második dobás mindig 1.)

18. Bergengóciában minden családban legalább 1 és legfeljebb 3 gyermek van. Az országban idén tombol a autóvásárlási láz. A túlköltekezést megakadályozandó miniszteri rendelet mondja ki, hogy senkinek sem lehet több autója, mint a családjában a gyermekek száma. A következő táblázatban az egyes családfajták aránya szerepel:

	1 gyerek	2 gyerek	3 gyerek
0 autó	0.05	0.05	0.05
1 autó	0.15	0.25	0.20
2 autó	0	0.05	0.15
3 autó	0	0	0.05

    Véletlenszerűen kiválasztunk egy családot.

    a) Adjuk meg a gyerekek számának eloszlását (azaz feledkezzünk meg a kocsikról)!

    b) Adjuk meg az autók számának eloszlását (azaz feledkezzünk meg a gyerekekről)!

    c) Ha tudjuk, hogy a véletlenszerűen kiválasztott családban 2 gyerek van, akkor mi a valószínűsége, hogy 1 kocsijuk van?

    d) Feltéve, hogy egy családban 1 autó van írjuk fel a gyerekek számának eloszlását!

    e) Adjuk meg a kocsik és gyerekek számának összegének eloszlását (segítség: fontos az átló)!

    f) Adjuk meg a gyerekek számának és a kocsik számának különbségének az eloszlását!

6. Feltételes eloszlások folytonos esetben

19. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
    Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 \cdot RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket:
    $A = \{X > \frac{1}{2}\}$ és $B = \{Y < \frac{1}{2}\}$.

a) Ellenőrizzük, hogy ennek a sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

b) $P(A) = ?$

c) $P(B) = ?$

d) $P(A \text{ és } B) = ?$

e) $P(A|B) = ?$

f) $P(B|A) = ?$

20. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

   a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

   b) $P(Y < \frac{1}{4}) = ?$

   c) $P(Y < y) = ?$

21. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^2.$$

   a) Igazoljuk, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!

   b) $P(X + Y < 1) = ?$

   c) $P(X < x) = ?$

   d) $P(Y < y) = ?$

   e) $P(Y < 0.2|X < 0.5) = ?$

   f) $P(X + Y < 1|X < 0.5) = ?$

22. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

   b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

   c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

7. Feltételes eloszlás

Fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d|X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

23. Vegyük ismét a 4.feladatban szereplő eloszlást!

   a) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.5) = ?$

b) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.8) =?$

c) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = x) =?$

25. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

a) $P(X + Y < 3) =?$

b) $P(X + Y < z) =?$

c) $P(X + Y < 3|X < 2) =?$

d) $P(2 < X + Y < 3|Y > 1) =?$