Matematika B4
IX. gyakorlat

2006. április 13.

1. Folytonos valószínűségi változók transzformációi

$y = ax + b$ egy lineáris transzformáció. Ha $Y = aX + b$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(y)$, akkor:

$$G(y) = \left\{ \begin{array}{cc} F(x) = F(\frac{y-b}{a}) & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F(x) = 1 - F(\frac{y-b}{a}) & \text{ha } a < 0 \end{array} \right\}$$

$$g(y) = f(\frac{y-b}{a})\frac{1}{|a|}$$

Ha t függvény monoton növekvő, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y))$$

$$g(y) = f(t^{-1}(y)) \left[t^{-1}(y)\right]'$$

És az általános képlet, ha t monoton növő és monoton csökkenő darabokból áll:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) + \cdots + g_i(y)$$

ahol $g_j(y)$ a t függvény j-edik darabjából adódó sűrűségfüggvény.

És egy fontos dolog: ha $F(x)$ tetszőleges invertálható eloszlásfüggvény, akkor az $F^{-1}(RND)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$. Ennek alapján generálhatunk tetszőleges eloszlású valószínűségi változót!

Feladatok:

1. Vegyük egy olyan valószínűségi változót, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ $(0 < x < 1)$.
   a) Mi lesz az $Y = 5X + 3$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Hogyan változott a várható érték és szórás?
   b) Lineáris transzformáció segítségével standardizáljuk X eloszlását, azaz találjunk egy olyan $t(x) = ax + b$ függvényt, hogy $aX + b$ valószínűségi változó 0 várható értékű, és 1 szórású legyen.
2. Van egy 25 óra várható értékű exponenciális eloszlás szerint kiégő égőnk. A barátommal a következő játékot játszuk: fizetek neki $25^2 = 625$ forintot, és ha kiég az égő, akkor ő kifizeti nekem az égő órákban mért élettartalmának négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlását!
3. Legyen X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg $X^{1/2}$, X^2, $X^{-1/2}$, X^{-1}, X^{-2} eloszlását. Hogyan változik a várható érték és szórás?
4. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása? Hogyan tudnánk ilyen eloszlást gyártani a már meglévő eloszlásból?

5. Legyen X egy 2-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz X^k eloszlása? Mi lesz az új várható érték, és az új szórás?

6. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5, 8]$ intervallumon.

   a) Számoljuk ki $|X - 6|$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

   b) Számoljuk ki X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

7. Tegyük fel, hogy (X, Y) egyenletes eloszlást követ a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ csúcsú háromszögön. Határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

8. Legyen (X, Y) egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

9. Vegyünk egy két dimenziós (X, Y) valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

10. Válasszunk az egységkörlapon egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Vetítsük a kapott pontot az x-tengelyre. Adjuk meg a levetített pont eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének képletét! (Vigyázat! Az eredmény nem az arkusz-szinusz eloszlás lesz, mivel a körlapon választottuk a pontot, nem az köríven.)

11. (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen a következő:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{64}xy & \text{ha } 0 \le x \le 4 \text{ és } 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   a) Adjuk meg X eloszlását!

   b) Ha tudjuk, hogy $X = 3$, akkor adjuk meg e feltétel mellett Y eloszlását!

   c) Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy 3 helyére egy paramétert írunk, azaz: ha tudjuk, hogy $X = x$, ahol $0 \le x \le 4$, akkor adjuk meg Y eloszlását e feltétel mellett.

   d) Mi lesz $X + Y$ eloszlása?

   e) Mi lesz $X \cdot Y$ eloszlása?

2. Transzformációk síkról síkra

Adott az (x, y)-síkon egy eloszlás $f(x, y)$ sűrűségfüggvénye. Az eloszlást az $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ függvénypárral megadott leképezés szerint az (u, v)-síkra transzformáljuk. A kapott eloszlás $g(u, v)$ sűrűségfüggvénye:

$$g(u, v) = f\left(x(u, v), y(u, v)\right)\ |det\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}|$$

ahol az $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ függvénypár a leképezés inverzét jelenti, $|det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|$ az inverz leképezés Jacobi-mátrixának determinánsának abszolútértéke.

12. Transzformáljuk az egységnégyzeten vett egyenletes eloszlást az alábbi függvénypárokkal megadott leképezések szerint:

   a) $u = x + 5$
   $v = y + 6$

   b) $u = 2x$
   $v = 3y$

   c) $u = 2x + 5$
   $v = 3y + 6$

d) $u = 2x + y$
$v = 3x + 2y$

e) $u = 4x + y$
$v = 3x + 2y$

f) $u = 2x - y - 4$
$v = x + y + 2$

13. Transzformáljuk az egységnégyzeten értelmezett $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlást az alábbi függvénypárokkal megadott leképezések szerint:

    a) $u = x + 5$
    $v = y + 6$

    b) $u = 2x$
    $v = 3y$

    c) $u = 2x + 5$
    $v = 3y + 6$

    d) $u = 2x + y$
    $v = 3x + 2y$

    e) $u = 4x + y$
    $v = 3x + 2y$

    f) $u = 2x - y - 4$
    $v = x + y + 2$

14. Transzformáljuk az első síknegyeden értelmezett $f(x, y) = 6e^{-2x-3y}$ sűrűségfüggvényű eloszlást függvénypárokkal megadott leképezések szerint:

    a) $u = x + 5$
    $v = y + 6$

    b) $u = 2x$
    $v = 3y$

    c) $u = 2x + 5$
    $v = 3y + 6$

    d) $u = 2x + y$
    $v = 3x + 2y$

    e) $u = 4x + y$
    $v = 3x + 2y$

    f) $u = 2x - y - 4$
    $v = x + y + 2$

15. Transzformáljuk az egységnégyzeten vett egyenletes eloszlást az alábbi függvénypárokkal megadott leképezések szerint, majd az (u, v)-síkon kapott eloszlást vetítsük le az u-tengelyre!

    a) $u = x + y$
    $v = y$

    b) $u = x - y$
    $v = y$

16. Transzformáljuk az egységnégyzeten értelmezett $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlást az alábbi függvénypárokkal megadott leképezések szerint, majd az (u, v)-síkon kapott eloszlást vetítsük le az u-tengelyre!

    a) $u = x + y$
    $v = y$

b) $u = x - y$
$v = y$

17. Transzformáljuk az első síknegyeden értelmezett $f(x, y) = 6e^{-2x-3y}$ sűrűségfüggvényű eloszlást függvénypárokkal megadott leképezések szerint, majd az (u, v)-síkon kapott eloszlást vetítsük le az u-tengelyre!

   a) $u = x + y$
   $v = y$

   b) $u = x - y$
   $v = y$