

Matematika A4

XI. gyakorlat

Vetier András kurzusa
2006. november 23.

1. Szórás

Az m várható értékű X valószínűségi változó szórása:

$$\text{diszkrét esetben: } D(X) = \sigma(X) = \sqrt{\sum_k (k - m)^2 \cdot p_k} = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2}.$$

$$\text{folytonos esetben: } D(X) = \sigma(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot f(x) dx} = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2}$$

1. A diszkrét P eloszlás tagjai: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x=1,2,3,4$). Mennyi az eloszlás várható értéke? Szórása?
2. A kockadobás értékét megszorozom 3-mal, és hozzáadok 5-öt. Mennyi az így kapott szám várható értéke? Szórása?
3. Számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését! Melyik a nagyobb?
4. Számítsuk ki az $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó valamely c értéktől vett átlagos eltérésének várható értékét ($E(|X - c|)$), illetve c -től való négyzetes eltérés abszolút értékét ($E((X - c)^2)$)! Mely c -re lesz az egyik, illetve a másik érték minimális?
5. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?
6. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?
7. Egy ismerősömmel 7 órakor van találkozóm. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?
8. Ha $E(X) = 1$ és $\sigma^2(X) = 5$, határozzuk meg
 - a) $E[(2 + X)^2]$
 - b) $\sigma^2(4 + 3X)$értékét.

2. CHT

Független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege. Azaz ha X_1, X_2, \dots, X_n függetlenek, akkor $\sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)$.

Sok független kísérlet összegénél használhatunk normális eloszlást. A standarizálásnál a várhatóértéket kell levonni, és a szórással kell elosztani, azaz $\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma S_n}$ tekinthető közelítőleg standard normálisnak.

9. A harminc fős osztályban mindenki generál a számológépével egy $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású számot. Mi a valószínűsége, hogy az összeg nagyobb 16-nál?
10. Egy trópusi országban minden nap esik. Sok éves statisztika alapján kiszámoltuk, hogy egy nap átlagosan 10 mm csapadék esik, a napi szórás pedig 2 mm. Mi a valószínűsége, hogy 100 nap alatt 800 mm-nél több esik?
11. Dobókockával dobok 100-szor, és összeadom a dobások összegét. Mennyi lesz a szórás? Nem ismerős a \sqrt{npq} képlet? Standardizáljuk az összeget!
12. Minden nap rágok a ceruzám végéből átlagosan fél centit (írni nem írok vele), a rágásom napi szórása pedig 0.1 cm. A ceruzám hossza 17 centiméter. Mi a valószínűsége, hogy 36 nap alatt teljesen elfogy?

3. Kovariancia

A kovariancia definíciója:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

A kovariancia mátrixban az i . oszlop j . sorában az i . és a j . valószínűségi változó kovarianciája áll, vagyis ez egy szimmetrikus mátrix, melynek főátlójában pedig épp a szórásnégyzetek helyezkednek el, aza két valváltozóra ez így néz ki:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \sigma^2(Y) \end{pmatrix}$$

13. X és Y együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = 60xy^2$, ha $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$. Határozzuk meg a kovarianciájukat!
14. Legyen X és Y független. Mennyi a kovarianciájuk?
15. A következő táblázat egy hallgató HáRe és A4 jegyeinek együttes valószínűségét mutatja. Mennyi a kovariancia? Pozitív vagy negatív? Miért?

HáRei \ A4	1	2	3	4	5
1	0.2	0.1	0.1	0	0
2	0	0.1	0.1	0	0
3	0	0.1	0.1	0.1	0.1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

16. (X, Y) közös sűrűségfüggvénye $2e^{-2x}/x$ ha $0 < x < \infty$ és $0 < y < x$. Mennyi a kovariancia?