Matematika A4
III. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. szeptember 28.

1. Bevezető kérdések

1. Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Tekintsük az alábbi 3 eseményt: a piros kockával párosat dobunk, a kék kockával párosat dobunk, a dobott összeg páros. Függetlenek-e ezek az események?
2. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?
   a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?
   b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
   c) a 12. autó a harmadik piros?

2. Független események

Jelölés: az "A és B" eseményt ezentúl AB-vel jelöljük.
A, B események függetlenek akkor és csak akkor, ha teljesül, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$.
Több esemény függetlensége esetén nem csak annak kell teljesülnie, hogy

$$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például:

$$P(\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}\ \overline{A_4} \dots A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) \dots P(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van. Fordítva is igaz: ha az összes így származtatott egyenlet fennáll, akkor az $A_1, A_2, \dots A_n$ eseményekről azt mondjuk, hogy együttesen függetlenek.
A feladatsorban szereplő nevezetes eloszlásokról a 3. gyakorlati anyagban található összefoglaló.

Feladatok

1. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Győződjünk meg róla, hogy A, B, C eseményekből bármely kettő független egymástól, de a 3 esemény együttesen már nem alkot független rendszert!
2. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ a dobott számok összege 7 , $B =$ legalább az egyik kockán van hatos , $C =$ mindkét kockával páratlant dobok , $D =$ a két kockával különböző számokat dobok , $E =$ a zöld kockával 4-est dobok .
   Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:
   a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?

b) Kizáróak-e az A és C események?

c) Mennyi a B esemény valószínűsége?

d) Hogy viszonul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?

f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

  i. függetlenek, de nem kizáróak,

  ii. kizáróak, de nem függetlenek.

3. Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások

1. *Indikátor eloszlás*:
   Egyetlen A kisérletet vegyünk és azt nézzük, hogy hányszor következik be. Mivel egyetlen egyszer végezzük el a kísérletet, ezért a bekövetkezések számát X-szel jelölve két eset lehetséges: A bekövetkezik, azaz $X = 1$ vagy $\overline{A}$ következik be, azaz $X = 0$. Ezekre a valószínűség legyen: $P(X = 1) = p$ és $P(X = 0) = 1 - p$
   Például: egy kockadobással kapcsolatban A a hatos dobás eseménye, akkor $P(A) = \frac{1}{6}$, vagyis $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ és $P(X = 0) = \frac{5}{6}$.

2. *Diszkrét egyenletes eloszlás*:
   n érték közül mindegyik ugyanakkora valószínűséggel, vagyis $\frac{1}{n}$ valószínűséggel következik be. Például egy szabályos kockával való dobás értékei: $P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = 6) = 1/6$

3. *Binomiális eloszlás*:
   Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:
   $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$
   Például: Pontosan 3 hatost dobunk 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$

4. *Geometriai eloszlás (optimista)*:
   Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p:
   $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

5. *Geometriai eloszlás (pesszimista)*:
   Hányat dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p: $P(X = k) = (1 - p)^k p$.

6. *Hipergeometrikus eloszlás*:
   A piros, és B fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k db piros golyót húzzunk ki:
   $$P(X = k) = h_{A,B,n}(k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$
   Például: A 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

7. a) *Negatív binomiális eloszlás (optimista)*:
   Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X = k) = \binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6) = \binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban: NBIN$(l, p)$: siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérlet elvégezni, hogy megkapjuk az l-edik sikert. $P(X = k) = \binom{k-1}{l-1}p^l(1-p)^{k-l}$

b) *Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)*:
Hányat dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X=k)=\binom{k}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-2}(1/6)=\binom{k}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-2}$. Általánosabban: NBIN$(l,p)$: siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hány kísérlet előzi meg az l-edik sikert. $P(X=k)=\binom{k}{l-1}p^l(1-p)^{k-l+1}$

Feladatok:

5. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.
   a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt kidobnánk a 12-t?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy nyolcszor dobunk a kockákkal?

6. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy
   a) pont k-szor dobunk a fej előtt?
   b) pont k-szor dobunk az érmével?

   Határozzuk meg mindkét esetben az eloszlásfüggvénynek a képletét is!

7. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

7.* 100 kulcs közül 2 nyitja az előttünk lévő ajtót. A kipróbált kulcsokat félretesszük. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból bejutunk? És mi a valószínűsége, hogy pontosan n próbálkozásból jutunk be? *(Teljes általánosítás a 16. feladatban.)*

8. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor az az előző eredménytől különbözne?

9. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűséggel megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell? Hány kérdés a legvalószínűbb, amennyire jó választ ad?

10. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)
    a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
    b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
    c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?
    d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?

11. Egy rozsomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra lép. 20 lépés megtétele után
    a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
    b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
    c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?

12. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot, egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. $P(X = 7) =$?

13. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza ebből 30 fehér. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vedég kap neki megfelelő itókát?

14. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

15. Egy dobozban N darab cédula van 1-től N-ig megszámozva. Visszatevés nélkül húzunk n-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

    a) legkisebbet
    b) legnagyobbat
    c) 2 -ik legkisebbet
    d) 3 -ik legkisebbet
    e) s-edig legkisebbet.

    Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek és az eloszlásfüggvénynek is a képletét! Határozza meg az eloszlás móduszát!

16. A 7. feladat általánosítása: Egy dobozban A darab piros és B darab fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzok az r. pirosig. Adjuk meg a súlyfüggvény és eloszlásfüggvénynek a képletét!

17. Egymás után kérdezgetjük az embereket a születésnapjukról: melyik hónap hányadikán születtek.

    a) Hányadik embernél adódik az első olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek és az eloszlásfüggvénynek is a képletét! Határozza meg az eloszlás móduszát!
    b) Hányadik embernél adódik a második olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!

18. Határozza meg egy másodrendű negatív binomiális eloszlás móduszát, illetve eloszlásfüggvényének a képletét!

19. Határozza meg egy r-ed rendű negatív binomiális eloszlás móduszát!

20. Határozza meg egy hipergeometrikus eloszlás móduszát!

21. Háromszor dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások száma között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól?

22. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?

23. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

24. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?

25. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?

26. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

    a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?
    b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?
    c) hány terméket szállított két leállás között?
    d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)

27. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 200 db szék van.

    a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék?
    b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?
    c) Hány szék kell, hogy legalább 0,99 valószínűséggel jusson mindenkinek szék?

28. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom Nektek. 30 dobás után el kell döntenetek, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznátok meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnétek?)

29. Mi a valószínűsége, hogy 0,1,2,3,4,5 találatom lesz a LOTTÓ-n?

24. Mi a valószínűsége, hogy 11,12,13,13+1 találatom lesz a TOTÓ-n ha felteszem hogy minden választ 1/3 valószínűséggel tudok?

30. Valaki egy LOTTÓ szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább 1/2 legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)