Matematika B4
V. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. október 12.

1. Bevezető kérdések

1. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőlges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$ részén van?
2. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbító elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka $20mm$ hosszú és a képkockák között $2mm$-es felhasználatlan csík van. Mi a valószínűsége, hogy a masina egy képkockába szakított bele?
3. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon.
   a) $P(X < x) = ?$
   b) $\frac{P(X \in (x_1, x_2))}{x_2 - x_1} = ?$

2. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel essen, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Jelölje a és b ennek a véges intervallumunk két végpontját. Annak a valószínűságe, hogy egy ilyen eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú szakaszba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyeneletes eloszlású az adott síktartományon.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}$$

Feladatok:

4. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

5. Egy körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?

6. Mi a valószínűsége, hogy a (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

   a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?

   b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátától?

7. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $\frac{1}{4}$ területegységnél?

8. Mi a valószínűsége, hogy ha a $(0,1)$ intervallumon kiválasztunk

   a) 2 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x-nél?

   b) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x-nél?

   c) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a nagyobb pont kisebb x-nél?

   d) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a második legkisebb pont kisebb x-nél?

9. *Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra 4 cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?

10. Mi a valószínűsége, hogy 3 független $(0,1)$-en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0,\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, és $(\frac{2}{3},1)$ intervallumba?

11. 0 és 1 között két számot választunk egymástól föggetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

    a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

    b) A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet összerakni?

12. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán egy-egy pontot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága kisebb, mint x ($1 \leq x \leq \sqrt{2}$)?

13. Mi a valószínűsége, hogy független, $(0,1)$-en egyenletes eloszlás szerinti két véletlen szám közül az egyik n-edik gyöke kisebb a másik m-edik gyökénél, azaz $P(\sqrt[n]{RND_1} < \sqrt[m]{RND_2})$?

14. Jancsi és Juliska 12 és 1 óra között szeretnének találkozni. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a 12 órát 0-val, így mindkettőjük érkezése egy $(0,1)$-beli szám. Tudjuk, hogy érkezésük egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változó, ami egy $(0,1)$-en egyenletes eloszlású szám négyzetgyökének eloszlásával egyezik meg. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha mindketten 20 percet ($1/3$ órát) várnak a másikra?

15. A feltételek ugyanazok, mint az előző esetben, csak ugyanilyen eloszlás szerint Juliska apja is kiér a megbeszélt helyre. Ha találkozik valakivel, akkor felpofozza, így a találkozás biztosan meghiúsul. Mi a valószínűsége, hogy a találka mégis létrejön? Mi a valószínűsége, hogy pofon csattan?

16. Válasszunk k db pontot a (0,1) intervallumon egymástól függetlenül, egyenként egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége, hogy az elhelyezkedésük szerint az l-edik kisebb x-nél?

17. Egy körbe szabályos háromszöget rajzolunk. A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a pont a háromszög belsejébe esik?

18. A $(0, 1)$ intervallumban egyeneletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mi a valószínűsége, hogy olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?

19. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszúrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?

20. Egy ropit két egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a középső darab hosszabb a ropi felénél?

21. *Általános Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra d cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, maj egy $2l$ cm hosszű tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?

22. Egy papírra 4 cm-enkét függőleges és vízszintes vonalakat húzunk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a 2 cm hosszú tű

    a) legalább 1 vonalra esik?
    b) pontosan 1 vonalra esik?

23. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0, 1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?

24. *Bertrand-paradoxon:* Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

    a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.
    b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.
    c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.