Matematika A4
VI. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. október 19.

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x számnál kisebb értéket:

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x)$$

A félév során olyan feladatokkal fogunk foglalkozni, ahol ez a függvény véges sok hely kivételével deriválható. Ekkor jelöljük a deriváltját $f(x) = F'(x)$-szel. $f(x)$-et sűrűségfüggvénynek hívjuk.

Tetszőleges $[a, b)$ intervallumba esés valószínűsége, felhasználva, hogy $F(x)$ vagy $f(x)$ függvény ismert:

$$\mathbb{P}(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. $(-\infty)$-ben 0-hoz, ∞-ben 1-hez tart,
2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
3. folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye mindenhol folytonos.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,
2. minden x-re $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, ezért $F'(x) = f(x)$ majdnem minden olyan x-re, ahol $F(x)$ folytonos.
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$

A valószínűségi változó várható értéke:
$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tf(t)\mathrm{d}t$
és tetszőleges $u(X)$ függvényének várható értéke:
$\mathbb{E}(u(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)f(t)\mathrm{d}t$

2. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változó örökifjú tulajdonságú, ha teljesül rá a következő: $\mathbf{P}(X > a + b | X > a) = \mathbf{P}(X > b)$. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó tárgy "él", a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy "újszölött" tárgynak.
Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
Megjegyzés
Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbf{P}(X > a + b | X > a) < \mathbf{P}(X > b)$ teljesül rá. *Példa*: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbf{P}(X > a + b | X > a) > \mathbf{P}(X > b)$. *Példa*: a Voronyezsből szökő katona milyen messzire tud eljutni a fronttól.

λ paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$. Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

Feladatok

1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény (ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0):

   a)
   $$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$
   b)
   $$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$
   c)
   $$H(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$
   d)
   $$I(x) = \frac{x}{4}(4 - x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

2. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0):

   a)
   $$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$
   b)
   $$g(x) = \frac{sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$
   c)
   $$h(x) = \frac{1}{3} sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1} ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$
   d)
   $$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

3. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával. Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

4. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?

5. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?

6. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint 1/4?

7. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerintérkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim 1/3-a hétvégére, 2/3-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

8. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy eloszlás.)*

9. Egyenletesen választunk egy pontot az egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0{,}5, 0{,}5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az Arcussinus-eloszlás.)*

10. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0{,}5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Milyen x-re lesz $F(x) = 0{,}5$? *(Azt az x számot, melyre $P(X < x) = 0{,}5$, az X valószínűségi változó mediánjánal nevezzük. Hasonlítsuk össze a várható értékkel!)*

11. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több, mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 prcet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

12. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?

13. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án (a születésnapomon) hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik alkatrészt érdemesebb megvenni? Azt, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ha $x > 1$, vagy ezt? Átlagosan mennyit bír a kétféle minőségű alkatrész?

14. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értékét!

15. Bizonyítsuk be, hogy az
$\mathbf{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$
$\mathbf{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$
eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

16. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

17. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

18. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?