Matematika A4
VIII. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. november 2.

1. CHT binomiális eloszlásra

Nagy n esetén az n-ed rendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó közelíthető np, $\sqrt{npq}$ paramétererű normális eloszlással.

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik? (Közelítsünk normális eloszlással!)

2. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik kb. 0.5! (Közelítsünk normális eloszlással!)

3. Hányszor kell érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?

4. Egy repülőjáratra 200 ember fér föl. Minden ember egymástól függetlenül 0.1 valószínűséggel nem jelenik meg az induláskor. Hány jegyet adjunk el, ha azt szeretnénk, hogy a járatok harmadánál forduljon csak elő, hogy valakinek nem jut hely?

5. Mi a valószínűsége, hogy a villamosmérnök hallgatók befférnek két 200-as előadóban tartott BSz órára, ha 500-an vannak, és mindenki 0.7 valószínűséggel hallgatja az előadást?

2. Feltételes eloszlások folytonos esetben

6. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
   Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 \cdot RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket:
   $A = \{X > \frac{1}{2}\}$ és $B = \{Y < \frac{1}{2}\}$.

   a) Ellenőrizzük, hogy ennek a sűrűségfüggvénye:
   $$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$
   b) $P(A) =?$
   c) $P(B) =?$
   d) $P(A \text{ és } B) =?$
   e) $P(A|B) =?$
   f) $P(B|A) =?$

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
   Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

b) $P(Y < \frac{1}{4}) =?$

c) $P(Y < y) =?$

8. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^2.$$

a) Igazoljuk, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!

b) $P(X + Y < 1) =?$

c) $P(X < x) =?$

d) $P(Y < y) =?$

e) $P(Y < 0.2|X < 0.5) =?$

f) $P(X + Y < 1|X < 0.5) =?$

9. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

3. Feltételes eloszlás

Fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d|X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

10. Vegyük ismét a 4.feladatban szereplő eloszlást!

a) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.5) =?$

b) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.8) =?$

c) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = x) =?$

11. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

a) $P(X + Y < 3) =?$

b) $P(X + Y < z) =?$

c) $P(X + Y < 3|X < 2) =?$

d) $P(2 < X + Y < 3|Y > 1) =?$