Matematika A4
IX. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. november 9.

1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?

2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0,6 valószínűséggel leveszem a polcról. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0,5 valószínűséggel kidobom az ablakon. Adjuk meg az ablakon kidobott könyvek számának eloszlását!

3. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg.

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

   a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
   b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
   c) X^2Y várható érékte?
   d) Feltéve, hogy $Y = 3$, mi X eloszlása?
   e) Független-e X és Y?

2. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x, y) \geq 0$, minden x, y valós számra.
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Feladatok:

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)
   $$f(x,y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

   b)
   $$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

   c)
   $$f(x,y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

   d)
   $$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

5. Határozzuk meg c-t úgy, hogy f(x,y) sűrűségfüggvény legyen:
   $$f(x,y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1$$

6. Vegyük az $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:
   a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
   b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
   c) $0 < X < 1$
   d) $3 < Y < 5$

3. 2-dimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Feladatok:

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
   b) Legyen $t(x, y) = xy$. Mennyi $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
   c) Legyen $t(x, y) = xy^2$. Mennyi $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

8. Legyen X a $[0, 1]$-en egyenletes, Y pedig az $[X, 1]$-en egyenletes. Mi a közös sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke? Mi Y várható értéke? Mi a szorzatuk, azaz XY várható értéke? Igaz-e, hogy ez a várható értékek szorzata?

4. Feltételes eloszlás

A fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d|X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

9. Legyen $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

   a) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.5) =?$
   b) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = 0.8) =?$
   c) $P(Y \in (0.3, 0.4)|X = x) =?$
   d) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.1) =?$
   e) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.4) =?$
   f) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = y) =?$

10. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

   a) $P(X + Y < 3) =?$
   b) $P(X + Y < z) =?$
   c) $P(X + Y < 3|X < 2) =?$
   d) $P(2 < X + Y < 3|Y > 1) =?$

5. Függetlenség

X, Y valószínűségi változók $f(x, y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(x, y) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x, y) = f_1(x)$$

11. Függetlenek-e az alábbi közös sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

   a) $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$
   b) $f(x, y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
   c) $f(x, y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$

d) $f(x,y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

12. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 24xy \quad \text{, ha} \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

a) Független-e X és Y?

b) $P(X < u, Y < v) =?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 1 \quad \text{, ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) =?$

b) Független-e X és Y?