2. gyakorlat

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. február 20.

1. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy helyzünk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumába annak hosszával arányos valószínűséggel essen, akkor a pontot **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük **az adott intervallumon**. Jelölje A és B ennek az intervallumunk a két végpontját. Ha $[C; D]$ az $[A; B]$ intervallumnak egy részintervalluma, akkor (a fentiek alapján) annak a valószínűsége, hogy a pont a $[C; D]$ intervallumba essen:

$$\text{A } [C; D] \text{ intervallumba esés valószínűsége} = \frac{D - C}{B - A}$$

Tehát:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pontot **egyeneletes eloszlásúnak** nevezzük **az adott síkbeli tartományon**:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}$$

1. Mennyi a valószínűsége annak, hogy éjszaka álmomból felriadva azt látom, hogy a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti részén van?

2. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbító elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka $20mm$ hosszú és a képkockák között $2mm$-es felhasználatlan csík van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a masina egy képkockába szakított bele?

3. A $[0, 1]$ intervallumon egymástól függetlenül kiválasztunk két számot egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kisebbik szám kisebb $0,4$-nél? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a nagyobbik szám kisebb $0,4$-nél?

4. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a (0,0), (0,2), (3,0), (3,2) pontok által meghatározott téglalapban egyenletes eloszlás szerint választott pont koordinátái közül a) a második koordináta kisebb, mint az első koordináta kétszerese? b) második koordináta kisebb, mint az első koordináta négyzete?

5. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $\frac{1}{4}$ területegységnél?

6. Az (A, B) intervallumon egymástól függetlenül kiválasztunk két számot egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kisebbik szám kisebb z-nél? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a nagyobbik szám kisebb z-nél?

7. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbsége kisebb, mint a $0,4$? b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

8. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet összerakni?

9. A és B között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám? b) A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet összerakni?

10. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán egy-egy pontot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága kisebb, mint z $(1 \le z \le \sqrt{2})$?

11. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a $(0,1)$ intervallumon, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott két véletlen szám közül a második kisebb az első felénél?

12. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a $(0,1)$ intervallumon, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott két véletlen szám közül a második kisebb az első kétszesénél?

13. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a $(0,1)$ intervallumon, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott két véletlen szám összege kisebb z-nél, azaz $P(RND_2 + RND_1 < z)$?

14. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a $(0,1)$ intervallumon, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott két véletlen szám szorzata kisebb z-nél, azaz $P(RND_2 \cdot RND_1 < z)$?

15. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a $(0,1)$ intervallumon, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott két véletlen szám hányadosa kisebb z-nél, azaz $P(\frac{RND_2}{RND_1} < z)$?

16. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a $(0,1)$ intervallumon, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott két véletlen szám közül a második kisebb az első négyzetgyökénél, azaz $P(RND_2 < \sqrt{RND_1})$?

17. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a $(0,1)$ intervallumon, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott két véletlen szám közül a második m-edik gyöke kisebb az első n-edik gyökénél, azaz $P(\sqrt[m]{RND_2} < \sqrt[n]{RND_1})$?

18. Jancsi és Juliska 12 és 1 óra között szeretnének találkozni. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a 12 órát 0-val, így mindkettőjük érkezése egy $(0,1)$-beli szám. Tudjuk, hogy érkezésük egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változó, ami egy $(0,1)$-en egyenletes eloszlású szám négyzetgyökének eloszlásával egyezik meg. Mennyi a valószínűsége annak, hogy találkoznak, ha mindketten 20 percet ($1/3$ órát) várnak a másikra de ha addig a másik nem érkezik meg, akkor szomorúan távoznak a randevú helyéről?

19. Egy körbe szabályos háromszöget rajzolunk. A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a pont a háromszög belsejébe esik?

20. Egy körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?

21. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a pont a kör belsejébe esik?

22. A $(0,1)$ intervallumban egyeneletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?

23. Egy ropit két egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott helyen eltörünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a középső darab hosszabb a ropi felénél?

24. *Bertrand-paradoxon:* Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

    a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

    b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

    c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

2. Feltételes valószínűség

Vizsgálhatjuk egy B esemény bekövetkezésének valószínűségét úgy is, hogy ha tudjuk, hogy egy másik A esemény bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám talált, és még most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálat valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt. **A B esemény valószínűségét, feltéve hogy az A esemény bekövetkezik**, a $P(B|A)$ jellel jelöljük, és a

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ és } B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

képlettel számíthatjuk ki.

25. Egy szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 6-ost dobunk, ha tudjuk, hogy a) párosat dobunk? b) legalább 3-ast dobunk? c) legfeljebb 5-öst dobunk?

26. Feldobunk 2 kockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?

27. Tegyük fel, hogy azonos eséllyel szülnek az anyák lányt illetve fiút. A kétgyerekes családokat vizsgálva, mennyi annak a valószínűsége, hogy két fiú van, ha tudjuk, hogy van fiú? És mennyi az esélye, hogy van lány is, ha tudjuk, hogy van egy fiú?

28. Az RND_1 és RND_2 számokat zsebszámológéppel generáltuk. Számoljuk ki a következő valószínűségeket:

    a) $\mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < 0.5) =?$ $\quad \mathbb{P}(|\mathrm{RND}_1 - \mathrm{RND}_2| < 0.25) =?$

    b) $\mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < a) =?$ $\quad \mathbb{P}(|\mathrm{RND}_1 - \mathrm{RND}_2| < b) =?$

    c) $\mathbb{P}(|\mathrm{RND}_1 - \mathrm{RND}_2| < 0.25 \,|\, \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < 0.5) =?$

29. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok $5-5$ lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

30. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mennyi a valószínűsége annak, hogy:
   i. fiúé?
   ii. betegé?
   iii. Beteg fiúé?

b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mennyi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, Mennyi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mennyi a valószínűsége annak, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

3. Szorzási szabály két eseményre

$$P(A \text{ és } B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

azaz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

31. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük két golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy elsőre pirosat és a másodikra fehéret húzunk, ha húzás után a golyókat a) visszatesszük b) nem tesszük vissza?

32. Egy lakótelepen két menetben csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immunissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%-uk pusztul el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy csótány a) átvészeli mindkét eljárást? b) a második irtáskor pusztul el? c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

33. Egy dobozban 16 tranzisztor közül 5 hibás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két egymás után kivett tranzisztor működőképes?

34. Egy valszámvizsgán 30 tétel van, ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mennyi valószínűsége annak, hogy a) csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt? b) mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!) c) egyik sem húz ilyen tételt?

4. Szorzási szabály három eseményre

$$P(A \text{ és } B \text{ és } C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(B|A \text{ és } B)$$

azaz

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(B|A \cap B)$$

35. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat a) visszatesszük b) nem tesszük vissza?

36. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immunissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy csótány a) átvészeli a teljes eljárást? b) az utolsó irtáskor pusztul el? c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

37. Egy dobozban 16 tranzisztor közül 3 hibás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három egymás után kivett tranzisztor működőképes?

5. Szorzási szabály n eseményre

$$P(A_1 \text{ és } A_2 \text{ és } \ldots \text{ és } A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \text{ és } A_2) \ldots P(A_{n-1}|A_1 \text{ és } A_2 \text{ és } \ldots \text{ és } A_{n-1})$$

38. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 5 golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet, negyedikre ismét zöldet, s végül az ötödikre újra pirosat húzunk, ha húzás után a golyókat a) visszatesszük b) nem tesszük vissza?

39. Egy dobozban 16 tranzisztor közül 3 hibás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy öt egymás után kivett tranzisztor működőképes?

6. Teljes valószínűség tétele

Ha a (véges vagy végtelen sok) $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak (azaz páronként diszjunktak és együtt kiadják a biztos eseményt), B pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \ldots$$

40. Egy iskola tanulóinak 80 %-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak hány %-a bukik meg az első vizsgán?

41. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott ketyere hibás?

42. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást az ellenséges politikai erők zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1-et kapunk?

7. Bayes-tétel

Ha a (véges vagy végtelen sok) $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, és egy kísérlet kapcsán megtudjuk, hogy egy B esemény bekövetkezett, érdekelhet bennünket, hogy az $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események közül melyik következett be. Nyilván akármelyik bekövetkezhet. Ezért felmerül a kérdés, hogy ha a B esemény bekövetkezett, akkor az egyes $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események milyen valószínűséggel következnek be. A kérdezett valószínűségekre a képlet:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \text{ és } B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \ldots}$$

43. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mennyi a valószínűsége annak, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

44. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást az ellenséges politikai erők zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik. Kaptunk egy 0-t. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezt 0-ként is adták le?