

5. gyakorlat

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. március 13.

1. Poisson eloszlás

Feladatok:

1. Ha Galyatetőről augusztusban éjfél körül átlagosan 10 percenként lehet csillaghullást látni, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy 10 perc alatt 2 csillaghullást is látunk?
2. Ha naponta Pesten átlagosan 2,5 súlyos baleset történik, Budán pedig csak 1,6, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy Budapesten egy nap nincs egyetlen baleset sem? Hány baleset a legvalószínűbb Budapesten?
3. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?
4. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhiba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhiba van?

2. Várható érték

A lehetséges kimeneteket jelöljük x_i -vel, a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig p_i -vel. Ekkor a várható érték:
$$\mathbb{E}(X) = \sum_i p_i \cdot x_i.$$

X helyett tekinthetjük $t(X)$ -et, azaz X egy függvényét (például a kockadobás eredményeit négyzetre emeljük). A $t(X)$ várható értékére a következő összefüggés adódik: $\mathbb{E}(t(X)) = \sum_i p_i \cdot t(x_i)$.

Jelöljük X -szel a kockadobás eredményét. X^2 várható értékét szemléletesen úgy is kiszámolhatnánk, hogy a kocka oldalaira új címkéket ragasztanánk 1, 4, 9, 16, 25, 36 számokkal. Így nem meglepő, hogy a képletekben p_i értékek változatlanok maradnak, míg x_i -t mindenhol formálisan kicseréljük $t(x_i)$ -re.

Feladatok:

5. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?
6. A diszkrét P eloszlás tagjai: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x=1,2,3,4$). Mennyi az eloszlás várható értéke?
7. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?
8. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő: $x_k = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ és $p_k = \frac{1}{2^k}$. Igazolja, hogy nincs várható értéke!
9. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?

10. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvényel fogadva, nyereségünk várható értéke?
11. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?
12. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Mekkora összegeket fizessenek egymásnak, hogy a játék méltányos legyen?
13. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X -szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek.
 - a) Adjuk meg a X valószínűségi változó eloszlását.
 - b) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét.
14. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p , illetve $q (= 1 - p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?
15. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?
16. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.
 - a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?
 - b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?
17. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?
18. Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-t vagy 2-t dob ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli 6-t dob ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszerre dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem előlről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyeresi és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?
19. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg róla, hogy még az is veszteséges!
20. Mennyi a lottón a találatok számának várható értéke?
21. Nevezetes eloszlások esetén mennyi a várható érték (binomiális, poisson, geometriai)?
22. Feldobunk egy pénzérmét. Ha az eredmény fej, még pontosan kétszer, ha írás, még pontosan egyszer dobjuk fel az érmét. Mennyi a dobott fejek számának várható értéke?
23. A pétervári játék a következő: egy játékos részvételi díjat fizet a kaszinónak, majd az első fejig dobál egy szabályos érmével. Ha a k -edik dobásra jön ki az első fej, akkor a játékos 2^k dukátot nyer. Mennyi az igazságos részvételi díj? (Igazságos a részvételi díj, ha sok játék után várhatóan sem a kaszinó, sem a játékos nem gazdagszik meg szemtelen módon a másik kárára.)
Módosítsuk a játékot: Ha a játékos első 99 dobása írás, akkor véget ér a játék és 2^{100} dukátot kap a játékos. Mennyi az igazságos részvételi díj?