9. gyakorlat

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. április 10.

1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg.

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

   a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
   b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
   c) X^2Y várható értéke?
   d) Feltéve, hogy $Y = 3$, mi X eloszlása?
   e) Mi X eloszlása?
   f) Független-e X és Y?

2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0,6 valószínűséggel leveszem a polcról. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0,5 valószínűséggel kidobom az ablakon. Adjuk meg az ablakon kidobott könyvek számának eloszlását!

3. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?

2. Kétdimenziós folytonos eloszlások

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \forall \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y)dxdy$$

A $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x,y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)
   $$f(x,y) = \frac{4}{5}(x+xy+y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<1$$

   b)
   $$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x>0, \quad y>0$$

   c)
   $$f(x,y) = 4xy-10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2+y^2<1$$

   d)
   $$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0<y<x<1$$

5. Határozzuk meg c-t úgy, hogy f(x,y) sűrűségfüggvény legyen:

   $$f(x,y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x>0, \quad y>0, \quad x+y<1$$

6. Vegyük az $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

   a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
   b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
   c) $0 < X < 1$
   d) $3 < Y < 5$
   e) $1 < X < 5$ feltéve, hogy $2 < Y < 8$
   f) $X < x$ (X eloszlása). Számítsuk ki a sűrűségfüggvényt is.

7. Legyen X a $[0,1]$-en egyenletes, Y pedig az $[X,1]$-en egyenletes. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke? Mi Y várható értéke? Mi a szorzatuk, azaz XY várható értéke? Igaz-e, hogy ez a várható értékek szorzata?

8. Tekintsük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
   Az első koordináta Normális eloszlást követ $\mu = 5$, $\sigma = 2$ paraméterekkel. A második koordináta egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon.

   a) Számoljuk ki a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
   b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

c) Legyen $t(x,y) = x^2y$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

9. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
   b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
   c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

3. Feltételes eloszlás

Fontos az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(c < Y < d | X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

10. Legyen $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

   a) $\mathbb{P}(Y < 0.4 | X = 0.5) =?$
   b) $\mathbb{P}(Y < 0.4 | X = x) =?$
   c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) =?$
   d) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) =?$
   e) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) =?$
   f) $\mathbb{P}(X < 0.7 | Y = 0.5) =?$
   g) $\mathbb{P}(X < 0.7 | Y = x) =?$
   h) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) =?$
   i) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) =?$
   j) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) =?$

11. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

   a) $P(X + Y < 3) =?$
   b) $P(X + Y < z) =?$
   c) $P(X + Y < 3 | X < 2) =?$
   d) $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) =?$

4. Függetlenség

X, Y valószínűségi változók $f(x,y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(x,y) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x,y) = f_1(x)$$

12. Függetlenek-e az alábbi közös sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

   a) $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$

b) $f(x,y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$

c) $f(x,y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$

d) $f(x,y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 24xy \quad \text{, ha} \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

a) Független-e X és Y?

b) $P(X < u, Y < v) =?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

14. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 1 \quad \text{, ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) =?$

b) Független-e X és Y?