10. gyakorlat

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. április 17.

1. Többdimenziós diszkrét eloszlások

1. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg.

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

   a) Mi a valószínűsége, hogy $X = 2$ és $Y = 1$?
   b) Mi a valószínűsége, hogy $Y = 3$?
   c) X^2Y várható értéke?
   d) Feltéve, hogy $Y = 3$, mi X eloszlása?
   e) Mi X eloszlása?
   f) Független-e X és Y?

2. Van 20 könyvem a polcon. Sorban elolvasom a címeiket, és mindegyik könyvet 0,6 valószínűséggel leveszem a polcról. A levett könyveket még átszelektálom, és mindegyiket 0,5 valószínűséggel kidobom az ablakon. Adjuk meg az ablakon kidobott könyvek számának eloszlását!

3. Először egy kockával dobunk, majd annyi érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk?

2. Kétdimenziós folytonos eloszlások

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

$$f(x,y) \geq 0 \qquad \forall \quad x,y \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x,y)dxdy$$

A $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x,y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)
   $$f(x,y)=\frac{4}{5}(x+xy+y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<1$$

   b)
   $$f(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x>0, \quad y>0$$

   c)
   $$f(x,y)=4xy-10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2+y^2<1$$

   d)
   $$f(x,y)=\frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0<y<x<1$$

5. Határozzuk meg c-t úgy, hogy f(x,y) sűrűségfüggvény legyen:

   $$f(x,y)=cy \quad , \quad \text{ha} \quad x>0, \quad y>0, \quad x+y<1$$

6. Vegyük az $f(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

   a) $0<X<1$ és $0<Y<1$
   b) $1<X<5$ és $2<Y<8$
   c) $0<X<1$
   d) $3<Y<5$
   e) $1<X<5$ feltéve, hogy $2<Y<8$
   f) $X<x$ (X eloszlása). Számítsuk ki a sűrűségfüggvényt is.

7. Legyen X a $[0,1]$-en egyenletes, Y pedig az $[X,1]$-en egyenletes. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke? Mi Y várható értéke? Mi a szorzatuk, azaz XY várható értéke? Igaz-e, hogy ez a várható értékek szorzata?

8. Tekintsük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
   Az első koordináta Normális eloszlást követ $\mu=5$, $\sigma=2$ paraméterekkel. A második koordináta egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon.

   a) Számoljuk ki a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
   b) Legyen $t(x,y)=xy$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

c) Legyen $t(x,y) = x^2y$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

9. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

   a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
   b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
   c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

3. Feltételes eloszlás

Fontos az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(c < Y < d | X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

10. Legyen $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket:

   a) $\mathbb{P}(Y < 0.4 | X = 0.5) = ?$
   b) $\mathbb{P}(Y < 0.4 | X = x) = ?$
   c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
   d) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$
   e) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
   f) $\mathbb{P}(X < 0.7 | Y = 0.5) = ?$
   g) $\mathbb{P}(X < 0.7 | Y = x) = ?$
   h) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
   i) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
   j) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$

11. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

   a) $P(X + Y < 3) = ?$
   b) $P(X + Y < z) = ?$
   c) $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
   d) $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$

4. Függetlenség

X, Y valószínűségi változók $f(x,y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(x,y) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x,y) = f_1(x)$$

12. Függetlenek-e az alábbi közös sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?

   a) $f(x,y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$

b) $f(x,y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
c) $f(x,y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$
d) $f(x,y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 24xy \quad \text{, ha} \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

a) Független-e X és Y?
b) $P(X < u, Y < v) =?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

14. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 1 \quad \text{, ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) =?$
b) Független-e X és Y?

5. Eloszlás transzformációk

- Egy dimenziós eloszlások transzformáltja egy dimenziós eloszlásba:

  Ha van egy X valószínűségi változónk $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel és $y = t(x)$ egy "sima" invertálható függvény ($x = t^{-1}(y)$), akkor az $Y = (X)$ valószínűségi változó $G(y)$ eloszlásfüggvénye könnyen számolható, amiből deriválással kaphatunk sűrűségfüggvényt.

  Ha $y = t(x)$ egy növekvő függvény, akkor

$$G(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(t(X) < y) = \mathbb{P}(X < t^{-1}(y)) = F(t^{-1}(y))$$

  Ebből deriválással kapjuk, hogy

$$g(y) = f(t^{-1}(y))(t^{-1}(y))'$$

  Ha $y = t(x)$ egy csökkenő függvény, akkor

$$G(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(t(X) < y) = \mathbb{P}(X > t^{-1}(y)) = 1 - F(t^{-1}(y))$$

  Ebből deriválással kapjuk, hogy

$$g(y) = -f(t^{-1}(y))(t^{-1}(y))'$$

  A közös formula ami mind növekvő, mind csökkenő transzformációk esetén alkalmazható a következő:

$$g(y) = f(t^{-1}(y)) \left|(t^{-1}(y))'\right|$$

- Több dimenziós eloszlások transzformáltja egy dimenziós eloszlásba:

  Ha van egy (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változónk $f(x,y)$ sűrűségfüggvénnyel és egy $z = t(x,y)$ függvényünk, akkor a $Z = t(X,Y)$ valószínűségi változó $R(z)$ eloszlásfüggvénye a következő képpen számolható:

$$R(z) = \mathbb{P}(Z < z) = \mathbb{P}(t(X,Y) < z) = \mathbb{P}(t(X,Y) \in (-\infty, z)) = \mathbb{P}((X,Y) \in A_z)$$

  vagyis

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x,y)dxdy$$

  ahol az A_z intervallum a $(-\infty, z)$ intervallum ősképe, vagyis $A_z = \{(x,y) : t(x,y)\ in(-\infty, z)\}$

15. X egyenletes eloszlású az {1, 2, 3, 4 ,5 ,6 } halmazon (pl dobókocka). Milyen eloszlást követ az $Y = 3X + 7$ valószínűségi változó? Adja meg X^2 valószínűségi- és eloszlásfüggvényének képletét!

16. X egyenletes eloszlású 0 és 1 között. Milyen eloszlást követ az $Y = 3X + 7$ valószínűségi változó? Adja meg X^2 valószínűségi- és eloszlásfüggvényének képletét!

17. X egyenletes eloszlású 0 és 2π között. Milyen eloszlást követ az $Y = tg(X)$ valószínűségi változó?

18. X exponenciális eloszlású $0,5$ paraméterrel. Adja meg X^2 eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét!

19. Vegyük azt a két dimenziós (X, Y) valószínűségi változót, aminek eloszlását az alábbi táblázat adja meg:

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

   a) Mennyi X várható értéke?
   b) Mennyi XY várható értéke?
   c) Mennyi $X^2 + Y$ várható értéke?

20. X és Y függetlenek és külön-külön egyenletes eloszlásúak 0 és 1 között. Legyen

$$U = XY$$
$$V = \frac{Y}{X}$$

Határozza meg

   a) (U, V) eloszlását,
   b) U eloszlását,
   c) V eloszlását!

21. (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = 60xy^2, \text{ ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1 - x$$

Legyen

$$U = XY$$
$$V = \frac{Y}{X}$$

Határozza meg

   a) (U, V) eloszlását,
   b) U eloszlását,
   c) V eloszlását!

22. Tegyük fel, hogy (X, Y) egyenletes eloszlást követ a $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott háromszög belsejében.

   a) Mennyi X várható értéke?
   b) Mennyi XY várható értéke?
   c) Mennyi $X^2 + Y$ várható értéke?

23. Tegyük fel, hogy X egyenletes eloszlást követ 0 és 2 között, Y pedig egyenletes eloszlást követ 0 és X között.
    a) Írja fel X sűrűségfüggvényének képletét!
    b) Írja fel Y feltételes sűrűségfüggvényének képletét az $X = x$ feltétel mellett!
    c) Írja fel Y feltételes eloszlásfüggvényének képletét az $X = x$ feltétel mellett!
    d) Határozza meg (X, Y) sűrűségfüggvényét!
    e) Határozza meg Y sűrűségfüggvényét!
    f) Írja fel X feltételes sűrűségfüggvényének képletét az $Y = y$ feltétel mellett!
    g) Adja meg a $P(X < 1|Y = y$ feltételes valószínűség értékét Y függvényében!
24. Két dobókockával dobunk. A dobott számok összegét jelölje X. Adja meg X valószínűségfüggvényét!
25. Két (független, 0 és 1 között egyenletes eloszlású) véletlen számot generálunk számítógéppel. Határozza meg összegük eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének képletét!
26. Legyenek X és Y független, $0,5$ -paraméterű, exponenciális eloszlású valószínűségi változók.
    a) $P(X + Y < 3) =?$
    b) $P(X + Y < z) =?$
    c) Adja meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének képletét!
27. Legyenek X és Y két független p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg $Z = X + Y$ valószínűségi függvényét.
28. Határozza meg a $0, 1, 2, 3$ pontokon vett (diszkrét) egyenletes eloszlásnak az önmagával vett konvolúcióját! Az elvégzett számításnak mi a gyakorlati jelentése?
29. Határozza meg a $(0, 3)$ intervallumon vett (folytonos) egyenletes eloszlásnak az önmagával vett konvolúcióját! Az elvégzett számításnak mi a gyakorlati jelentése?
30. Tegyük fel, hogy X egyenletes eloszlást követ 0 és 2 között, Y pedig egyenletes eloszlást követ 0 és X között. Írja fel X feltételes eloszlásfüggvényének képletét az $Y = y$ feltétel mellett!
31. X exponenciális eloszlású $0,5$ paraméterrel. Milyen eloszlást követ az $Y = 3X + 7$ valószínűségi változó?
32. X exponenciális eloszlású $0,5$ paraméterrel. Adja meg X^3 eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét!
33. Legyenek X és Y független, $0,5$ -paraméterű, exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Számítsa ki $X + Y$ várható értékét!

6. Egy kis ízelítő előre

34. X_1 és X_2 két normális eloszlású valószínűségi változó $\sigma = 4$, $\mu_0 = 3$ paraméterekkel.
    Határozza meg a $\mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} < c\right)$ valószínűség értékét.
35. X_1 és X_2 két normális eloszlású valószínűségi változó $\sigma = 4$, $\mu_0 = 3$ paraméterekkel. Legyen $\mu_1 = 5$
    Határozza meg a $\mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} < c\right)$ valószínűség értékét.
36. X_1 és X_2 két normális eloszlású valószínűségi változó $\sigma = 4$, $\mu_0 = 3$ paraméterekkel. μ_1 értéke fussa be az egész valós tengelyt.
    Határozza meg a $\mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} < c\right)$ valószínűség értékét minden lehetséges μ_1 esetén. Ábrázolja amit kap.