11. gyakorlat

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. április 24.

1. Kovariancia

A kovariancia definíciója:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

A kovariancia mátrixban az i. oszlop j. sorában az i. és a j. valószínűségi változó kovarianciája áll, vagyis ez egy szimmetrikus mátrix, melynek főátlójában pedig épp a szórásnégyzetek helyezkednek el, aza két valváltozóra ez így néz ki:

$$\binom{\sigma^2(X) \quad cov(X,Y)}{cov(X,Y) \quad \sigma^2(Y)}$$

Feladatok:

1. A következő táblázat egy hallgató HáRe és A4 jegyeinek együttes eloszlását mutatja.

HáRe\ A4	1	2	3	4	5
1	0.2	0.1	0.1	0	0
2	0	0.1	0.1	0	0
3	0	0.1	0.1	0.1	0.1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

   Határozza meg mindkét tárgy esetében a jegy várható értékét, szórásnégyzetét és szórását! Mennyi a két tárgy jegyei közötti kovariancia?

2. (X, Y) sűrűségfüggvénye

   $f(x, y) = 60xy^2$, ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1 - x$

   Határozza meg

   a) az X és Y közötti kovarianciát,

   b) X eloszlását,

   c) Y eloszlását,

   d) $X + Y$ eloszlását!

3. Tegyük fel, hogy X egyenletes eloszlást követ 0 és 2 között (azaz $X = 2 * RND_1$), Y pedig legyen $X * RND_2^2$.

   a) Írja fel X sűrűségfüggvényének képletét!

b) Írja fel Y feltételes sűrűségfüggvényének képletét az $X = x$ feltétel mellett!

c) Írja fel Y feltételes eloszlásfüggvényének képletét az $X = x$ feltétel mellett!

d) Határozza meg (X, Y) sűrűségfüggvényét!

e) Határozza meg Y sűrűségfüggvényét!

f) Írja fel X feltételes sűrűségfüggvényének képletét az $Y = y$ feltétel mellett!

g) Adja meg a $P(X < 1|Y = y$ feltételes valószínűség értékét Y függvényében!

h) Mennyi a kovarianciájuk?

2. Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \cap Y = l - k)$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = l - k)$$

Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, és $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx$$

Feladatok:

4. Határozza meg 3 db p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás összegének eloszlását! Ismerős-e az eredmény? (És miért igen?)

5. Határozza meg egy λ és egy ν db p paraméterű Poisson eloszlás összegének eloszlását! Ismerős-e az eredmény? (És miért igen?)

6. Határozza meg a $(0, 3)$ intervallumon vett (folytonos) egyenletes eloszlásnak az önmagával vett konvolúcióját!

7. Határozza meg egy $(0, 2)$ intervallumon és egy $(0, 3)$ intervallumon vett egyeneletes eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlását (konvolúcióját)!

8. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor ezt nevezzük $GAM(\lambda, 2)$ eloszlásnak.)

9. Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!

És egy fontos dolog: ha X tetszőleges valószínűségi változó, $F(x)$ az eloszlásfüggvénye, akkor $F^{-1}(RND)$ értéke X-szel megegyező eloszlású. Ezt felhasználva generálhatunk tetszőleges eloszlású valószínűségi változót!

10. Egy égőgyárban 10000 óra várható értékű izzókat gyártanak (amelyek eloszlása exponeneciális eloszlást követ). Zsebszámológéppel generáljuk 3 ilyen eloszlású értéket.

11. Generáljunk $RND_1 \cdot RND_2$ valószínűségi változót úgy, hogy csak egyszer nyomjuk le az RND gombot!