# 1. gyakorlat

Matematika A4
Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007.09.10, 12

***A gyakorlaton a ********** -gal jelölt részek kapjanak elsőbbséget!***

**Tartalom:**

## 1. Egyszerű elvek és technikák

1. egyesítés: **összeadás**
2. eldobás: **kivonás**
3. rendezett párok képzése, fa-diagram, ablak-diagram: **szorzás**
4. csoportok képzése, faktorizáció: **osztás**

## 2. Kombinatorikus alapképletek

| | **ismétlés nélküli** | **ismétléses** |
|---|---|---|
| **permutáció** | $n!$<br><br>$n$ futó beérkezésének sorrendje<br>(sorrend számít) | $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$<br><br>$n$ golyót ennyi féle képpen állíthatunk sorba,<br>ha $k_1, k_2, \ldots k_r$ db külön-külön egyszínű<br>(sorrend számít) |
| **variáció** | $\frac{n!}{(n-k)!}$<br><br>$n$ futó beérkezésének sorrendje<br>ha csak az első $k$ helyet tekintjük<br>(sorrend számít) | $l^k$<br><br>$l$ darab betűből készíthető<br>$k$ hosszú szavak száma<br>(sorrend számít) |
| **kombináció** | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$<br><br>$n$ golyóból kiválasztunk $k$ darabot<br>(sorrend nem számít) | $\binom{k+l-1}{l}$<br><br>$k$ féle cukorkából (mindegyikből akármennyi van)<br>hazaviszünk $l$-et, ennyi féleképpen tehetjük meg<br>(sorrend nem) számít)<br>(Ezt a képletet nem kell tudni) |

## 3. Érmét dobálunk. Eseteket számolunk

Az alábbi feladatok közül az első néhányban egy szabályos érmét dobunk fel újra meg újra. Amikor fejet dobunk, akkor egy F betűt írunk, amikor írást, akkor pedig egy I betűt. Így minden dobássorozatból egy olyan betűsorozat adódik, ami F és I betűkből áll.

1. **Háromszor dobunk egy érmével. A dobássorozatból egy 3 betűből álló sorozat adódik.**

   Adja meg az összes olyan betűsorozatot, ami így kiadódhat!

   Hány ilyen sorozat létezik?

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs F betű?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két F betű szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három F betű szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, de az előző betű mind I?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan egy F szerepel?

2. **Négyszer dobunk egy érmével. A dobássorozatból egy 4 betűből álló betűsorozat adódik.**

   Adja meg az összes olyan betűsorozatot, ami így kiadódhat!

   Hány ilyen sorozat létezik?

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs F betű?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben legalább egy F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben legalább két F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben legalább három F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben legfeljebb egy F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben legfeljebb két F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben legfeljebb három F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan négy F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, de az előző betű mind I?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan egy F szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan két F szerepel?

3. **Tízszer dobunk egy érmével. A dobássorozatból egy 10 betűből álló betűsorozat adódik.**

   Hány ilyen sorozat létezik?

   Ha a sorozatokat az ABC szabályai szerint rendezzük, akkor a felsorolásban mi az első-, illetve az utolsó öt sorozat? Ezeket adja meg!

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs nincs F betű?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, de az előző betű mind I?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan egy F szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan két F szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan három F szerepel?

4. **$n$-szer dobunk egy érmével. A dobássorozatból egy $n$ hosszúságú betűsorozat adódik.**

   Hány ilyen sorozat létezik?

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs nincs F betű?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab F betű szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, de az összes előző betű mind I?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan $k$ darab F szerepel?

## 4. Dobókockát dobálunk. Eseteket számolunk

5. **Háromszor dobunk egy szabályos dobókockával. A dobássorozatból egy 3 hosszúságú számsorozat adódik.**

   Hány ilyen sorozat létezik?

   Ha a sorozatokat háromjegyű számoknak tekintjünk, és ennek megfelelően növekvő sorrendben rendezzük őket, akkor a felsorolásban mi az első-, illetve az utolsó tíz sorozat? Ezeket adja meg!

   Képzeljük el, hogy a dobókockán a 6-os szám piros színű, a többi szám kék.

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

   Képzeljük el, hogy a dobókockán az 5-ös és a 6-os szám piros színű, a többi szám kék színű.

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

6. **Négyszer dobunk egy szabályos dobókockával. A dobássorozatból egy 4 hosszúságú számsorozat adódik.**

   Hány ilyen sorozat létezik?

   Ha a sorozatokat négyjegyű számoknak tekintjünk, és ennek megfelelően növekvő sorrendben soroljuk fel őket, akkor a felsorolásban mi az első-, illetve az utolsó tíz sorozat? Ezeket adja meg!

   **Képzeljük el, hogy a dobókockán a 6-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan négy piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?

   **Képzeljük el, hogy a dobókockán az 5-ös és a 6-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?

7. **Tízszer dobunk egy szabályos dobókockával. A dobássorozatból egy 10 hosszúságú számsorozat adódik.**

   Hány ilyen sorozat létezik?

   **Képzeljük el, hogy a dobókockán a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan öt piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben $k$ darab piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan $k-1$ darab piros van?

   **Képzeljük el, hogy a dobókockán az $5$-ös és a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan öt piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben $k$ darab piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan $k-1$ darab piros van?

8. **$n$-szer dobunk egy szabályos dobókockával. A dobássorozatból egy $n$ hosszúságú számsorozat adódik.**

   Hány ilyen sorozat létezik?

   **Képzeljük el, hogy a dobókockán a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben $k$ darab piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan három piros van?

**Képzeljük el, hogy a dobókockán az $5$-ös és a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?

Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan $k-1$ darab piros van?

## 5. Két szín van. Visszatevés nélkül húzunk. Eseteket számolunk

9. **Egy dobozban $10$ darab cédula van, $1$-től $10$-ig megszámozva. $3$-szor húzunk visszatevés nélkül. A húzások sorozatából egy $3$ hosszúságú számsorozat adódik.**

   Hány ilyen sorozat létezik?

   **Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $4$ darab piros színű, a többi $6$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, 3, 4$ számok piros színűek, az $5, 6, 7, 8, 9, 10$ számok kék színűek.**

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

10. **Egy dobozban $50$ darab cédula van, $1$-től $50$-ig megszámozva. $10$-szer húzunk visszatevés nélkül. A húzások sorozatából egy $10$ hosszúságú számsorozat adódik.**

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $20$ darab piros színű, a többi $30$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, 20$ számok piros színűek, a $21, 22, \ldots, 10,$ számok kék színűek.**

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan egyetlen piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

11. **Egy dobozban $N$ darab cédula van, $1$-től $N$-ig megszámozva. $n$-szer húzunk visszatevés nélkül. A húzások sorozatából egy $n$ hosszúságú számsorozat adódik.**

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy $N = A + B$, és hogy a cédulákon lévő számok közül az első $A$ darab piros színű, a többi $B$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, A$ számok piros színűek, az $A + 1, A + 2, \ldots, A + B$ számok kék színűek.**

Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

## 6. Két szín van. Visszatevéssel húzunk. Eseteket számolunk

12. **Egy dobozban** $10$ **darab cédula van,** $1$**-től** $10$**-ig megszámozva.** $3$**-szor húzunk visszatevéssel. A húzások sorozatából egy** $3$ **hosszúságú számsorozat adódik.**

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első** $4$ **darab piros színű, a többi** $6$ **darab kék színű, azaz a cédulákon az** $1, 2, 3, 4$ **számok piros színűek, az** $5, 6, 7, 8, 9, 10$ **számok kék színűek.**

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben három piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

13. **Egy dobozban** $50$ **darab cédula van,** $1$**-től** $50$**-ig megszámozva.** $10$**-szer húzunk visszatevéssel. A húzások sorozatából egy** $10$ **hosszúságú számsorozat adódik.**

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első** $20$ **darab piros színű, a többi** $30$ **darab kék színű, azaz a cédulákon az** $1, 2, \ldots, 20$ **számok piros színűek, a** $21, 22, \ldots, 10$ **számok kék színűek.**

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

14. **Egy dobozban** $N$ **darab cédula van,** $1$**-től** $N$**-ig megszámozva.** $n$**-szer húzunk visszatevéssel. A húzások sorozatából egy** $n$ **hosszúságú számsorozat adódik**.

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy** $N = A + B$**, és hogy a cédulákon lévő számok közül az első** $A$ **darab piros színű, a többi** $B$ **darab kék színű, azaz a cédulákon az** $1, 2, \ldots, A$ **számok piros színűek, az** $A + 1, A + 2, \ldots, A + B$ **számok kék színűek.** Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

## 7. Három szín van. Visszatevés nélkül húzunk. Eseteket számolunk

15. **Egy dobozban** $60$ **darab cédula van,** $1$**-től** $60$**-ig megszámozva.** $10$**-szor húzunk visszatevés nélkül. A húzások sorozatából egy** $10$ **hosszúságú számsorozat adódik.**

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első** $15$ **darab piros színű, a következő** $20$ **darab fehér színű, az utolsó** $25$ **darab zöld színű. azaz a cédulákon az** $1, 2, \ldots, 15$ **számok piros színűek, a** $16, 17, , ,$ $35$**, számok kék színűek, a** $36, 37, , , , 60$ **számok kék színűek.**

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs fehér szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen fehér szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két fehér szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három fehér szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben $k$ darab fehér szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs zöld szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen zöld szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két zöld szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab zöld szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben 2 darab piros, 3 darab fehér és 5 darabzöld szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben $i$ darab piros, $j$ darab fehér és $k$ darab zöld szám szerepel? Milyen feltételnek kell teljesülni $i$-re, $j$-re, $k$-ra, hogy ilyen sorozat létezhessen?

## 8. Három szín van. Visszatevéssel húzunk. Eseteket számolunk

16. **Egy dobozban** $60$ **darab cédula van,** $1$**-től** $60$**-ig megszámozva.** $10$**-szor húzunk visszatevéssel. A húzások sorozatából egy** $10$ **hosszúságú számsorozat adódik.**

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első** $15$ **darab piros színű, a következő** $20$ **darab fehér színű, az utolsó** $25$ **darab zöld színű. azaz a cédulákon az** $1, 2, \ldots, 15$ **számok piros színűek, a** $16, 17, , ,$ $35$**, számok kék színűek, a** $36, 37, , , , 60$ **számok kék színűek.**

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab piros szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben nincs fehér szám?

    Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen fehér szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két fehér szám szerepel?

    Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab fehér szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben nincs zöld szám?

Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen zöld szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két zöld szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben három fehér zöld szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben pontosan $k$ darab zöld szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben 2 darab piros, 3 darab fehér és 5 darabzöld szám szerepel?

Hány olyan sorozat van, amiben $i$ darab piros, $j$ darab fehér és $k$ darabzöld szám szerepel? Milyen feltételnek kell teljesülni $i$-re, $j$-re, $k$-ra, hogy ilyen sorozat létezhessen?

## 9. Vegyes feladatok. Eseteket számolunk

17. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

18. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?

19. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)

20. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet 1 fajtából többet is venni?

21. Van 6 lányismerősöm, és 2-t el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?

22. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár és 3 titkárnő jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?

23. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

24. Rendezgetem a gémkapocs gyűjteményemet. Van egy barna, egy szürke, és egy fehér. Hányféleképpen rakhatom őket sorba? És ha 7 különböző lenne?

25. Piros, sárga, zöld és kék szinekből hányféleképpen lehet háromsávos (vízszintes sráfozású) zászlót készíteni, ha minden színt legfeljebb egyszer használhatunk, és a szomszédos mezők nem lehetnek egyszínűek?

26. Hány különböző autórendszám készíthető (ahol három betűt három számjegy követ)? (26 különböző betűt használnak a rendszám készítéshez.)

27. Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatos szelvényünk? És hatoslottó szelvényt?

28. Hány totó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen 13+1 találatoos szelvényünk?

## 10. Az esemény fogalma

Ha egy jelenség megfigyelésére elvégzünk egy kísérletet, tehát megadott feltételek mellett megfigyeljük azt, ami bennünket érdekel, akkor a kísérlet lehetséges eredményeit **kimenetelek**nek nevezzük. Ha például

a) egy szabályos dobókockával dobunk, és azt nézzük, hogy hányas számot kapunk, akkor a kimenetelek az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok;

b) ha két szabályos, de egymástól jól megkülönböztethető dobókockával dobunk (az egyik kocka piros, a másik pedig kék), és azt nézzük, hogy milyen számpár adódik (a piros kockán adódó szám adja a számpár első elemét, a kék kockán olvasható szám a másodikat), akkor 36 kimenetel lesz, melyeket nem nehéz felsorolni vagy táblázatba rendezni. Íme a felsorolás:

   $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,5)$, $(5,6)$, $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$

   A táblázatos elrendezés sokkal áttekinthetőbb:

   $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$
   $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$
   $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$
   $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(4,6)$
   $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,5)$, $(5,6)$
   $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$

Az összes kimenetel halmazát **eseménytér**nek nevezzük. Az eseménytér

a) az első példában a 6-elemű $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz.

b) Az második példában az előbb felsorolt 36 számpárból álló halmaz.

A kísérlet elvégzése során vizsgálhatjuk azt, hogy egy adott állítás bekövetkezik-e. Ilyenkor az állítást **eseménynek** nevezzük. Ha egy elvégzett kísérletnél az állítás igaznak bizonyul, akkor azt mondjuk, hogy az esemény **bekövetkezett**, ha az állítás hamisnak bizonyul, akkor azt mondjuk, hogy az esemény **nem következett be**.

Egy esemény legtöbbnyire kapcsolatba hozható a kimenetelekkel. Például

a) miközben azt figyeljük, hogy milyen számot dobunk a dobókockával, fontos lehet számunka az az esemény, hogy páros számot dobunk-e. A 2, 4, 6 kimenetelek nyilván az esemény bekövetkezését jelentik, az 1, 3, 5 kimenetelek pedig nem. Ezért a 2, 4, 6 kimeneteleket az eseményre nézve **kedvező** kimeneteleknek nevezzük. Tehát "páros számot kapunk" eseményre kedvező kimenetelek: 2, 4, 6.

b) A piros és kék kockákkal dobva felmerülhet az a kérdés, hogy vajon a pirossal nagyobbat dobunk-e mint a kékkel. Világos, hogy a fenti 36 kimenetel közül erre az eseménye **kedvező** az alábbi 15 kimenetel:

   $(2,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$

   A 15 **kedvező** kimenetel felsorolása táblázatos elrendzésben bizonyára sokaknak itt is szimpatikusabb:

   $(2,1)$
   $(3,1)$, $(3,2)$,
   $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$,
   $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$,
   $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$

# 11. A valószínűség fogalma

Ha egy jelenség megfigyeléséretöbb kísérletet is végrehajtjuk, akkor egy **kísérletsorozatot** kapunk. A kísérletsorozat minden lépésénél nézhetjük azt, hogy egy adott esemény bekövetkezik-e vagy sem, és megszámolhatjuk, hogy a kísérletsorozatban addig hányszor következett be. Ezt a számot az esemény **bekövetkezési számának** vagy **gyakoriságának** nevezzük. Ez a szám nyilván egy egész szám, melynek értéke $0$ és az elvégzett kísérletek száma között van (beleértve ezeket a szélsőséges értékeket is). Ezt a számot elosztva az elvégzett kísérletek számával megkapjuk az eseménynek a **relatív gyakoriságát**, ami nyilván egy $0$ és $1$ közötti szám (beleértve ezeket a szélsőséges értékeket is).

Fontos tapasztalati tény, hogy egy kísérletsorozatban egy esemény relatív gyakorisága a kísérletek számának növelésével egy bizonyos - véletlentől nem függő - érték körül stabilizálódik, a kísérletszám növelésével közelít egy számértékhez. Egy adott esemény esetén ez a számérték újabb és újabb kísérletsorozatok elvégzése esetén is ugyanaz - az eseményre jellemző - szám lesz. Ezt az értéket nevezzük az adott esemény **valószínűség**ének. A relatív gyakoriság akármilyen nagy kísérletszám esetén ingadozásokat mutat a mondott számérték körül, de ez az ingadozás - megtapasztalható módon - a kísérletszám növelésével egyre kisebbnek bizonyul.

A valószínűségszámítás tanulásakor nehézséget okoz, hogy a tanulók általában nem rendelkeznek valóságos tapasztalatokkal, hiszen mikor is tudtak volna sok kísérletet sokszor elvégezni úgy, hogy az eredményeket még fel is dolgozták és elemzték volna!

Ennek az élménynek a pótlására jó eszköz a számítógép, aminek beépített véletlen generátora segítségével **szimulálni** lehet a véletlen jelenségeket, és a számítógép segítségével még a feldolgozás, elemzés és a vizuális megjelenítés is megvalósítható.

Egy esemény valószínűségét közelíteni lehet kísérletsorozatok tényleges elvégzésekor a kiszámított relatív gyakoriságokkal. Az, hogy a közelítés pontossága milyen kapcsolatban van az elérhető pontossággal, fontos gyakorlati és elméleti kérdés, amivel a félév során mi is fogunk foglalkozni.

Viszont örvendetes - és lehet, hogy egyesek számára először talán meglepő - tény, hogy egy esemény valószínűségét sok esetben elméleti úton ki letet gondolni, anélkül, hogy akárcsak egyetlen kísérletet is elvégeznénk.

Egy esemény valószínűségének elméleti kiszámolásához egyelőre csak egy egyszerű - a tapasztalattal összhangban lévő - elvet használunk fel: ha a kimenetelek száma véges, és azok egyformán valószínűeknek tekinthetők, akkor egy esemény valószínűsége:

$$\textit{\textbf{valószínűség}} = \frac{\textit{\textbf{kedvező kimenetelek száma}}}{\textit{\textbf{összes kimenetelek száma}}}$$

Az alábbi feladatokban először az összes kimenetel halmazát, az eseményteret kell úgy felvenni, hogy a kimenetelekről kézenfekvő legyen elfogadni, hogy azok mind egfyformán valószínűek. Ezek után meg kell találni a szóbanforgó eseményre kedvező kimeneteleket. A kedvező kimenetelek számát elosztva az összes kimenetel számával, jutunk a kérdezett valószínűséghez.

## 12. Érmét dobálunk. Valószínűséget számolunk

29. **Kétszer dobunk egy érmével.**

Mi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye fej?

Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobás eredménye fej?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második dobás eredménye is fej?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második dobás eredménye különvöző?

30. **Háromszor dobunk egy érmével.**

Mi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye fej és a harmadik dobás eredménye írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobás eredménye fej?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második dobás eredménye is fej?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második dobás eredménye különvöző?

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem dobunk fejet?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan egy fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan három fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, de előző dobások mind írások?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan egy fej van?

31. **Négyszer dobunk egy érmével.**

Mi a valószínűsége annak, hogy a dobás-eredmények így váltakoznak: "fej-írás-fej-stb" vagy "írás-fej-írás-stb"?

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem dobunk fejet?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadik dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy a negyedik dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy a negyedik dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan egy fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a harmadik dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadik és a negyedik dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan három fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, de előző dobások mind írások?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan egy fej van?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan két fej van?

32. **Tízszer dobunk egy érmével.**

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem dobunk fejet?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a második dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy az első és a harmadik dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy a kilencedik és a tízedik dobás fej és az összes többi írás?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan hét fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, de előző dobások mind írások?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan egy fej van?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan két fej van?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan öt fej van?

33. **$n$-szer dobunk egy érmével.**

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem dobunk fejet?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$ fejet dobunk?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és előző dobások mind írások?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan egy fej van?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan két fej van?

Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás fej, és az előző dobások között pontosan $k-1$ fej van?

## 13. Dobókockát dobálunk. Valószínűséget számolunk

34. **Háromnszor dobunk egy szabályos dobókockával. Képzeljük el, hogy a dobókockán a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem dobunk pirosat?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két pirosat dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan három pirosat dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, de előző dobások mind kékek?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás prios, és az előző dobások között pontosan négy piros van?

    **Tízszer dobunk egy szabályos dobókockával. Képzeljük el, hogy a dobókockán a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem dobunk pirosat?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két pirosat dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan három pirosat dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, de előző dobások mind kékek?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, és az előző dobások között pontosan négy piros van

    **Képzeljük el, hogy a dobókockán az $5$-ös és a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem dobunk pirosat?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan két pirosat dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan három pirosat dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy $k$ darab piros számot dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, és előző dobások mind kékek?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, és az előző dobások között pontosan négy piros van?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, és az előző dobások között pontosan $k-1$ piros van?

35. **$n$-szer dobunk egy szabályos dobókockával. Képzeljük el, hogy a dobókockán a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$ darab piros számot dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, és az előző dobások között pontosan $k-1$ piros van

    **Képzeljük el, hogy a dobókockán az $5$-ös és a $6$-os szám piros színű, a többi szám kék színű.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$ darab piros számot dobunk?

    Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobás piros, és az előző dobások között pontosan $k-1$ piros van

## 14. Két szín van. Visszatevés nélkül húzunk. Valószínűséget számolunk

36. **Egy dobozban $10$ darab cédula van, $1$-től $10$-ig megszámozva. $3$-szor húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $4$ darab piros színű, a többi $6$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, 3, 4$ számok piros színűek, az $5, 6, 7, 8, 9, 10$, számok kék színűek.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy egyszer húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan kétszer húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan háromszor húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy $k$-szor húzunk piros számot?

37. **Egy dobozban $50$ darab cédula van, $1$-től $50$-ig megszámozva. $10$-szer húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $20$ darab piros színű, a többi $30$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, 20$ számok piros színűek, a $21, 22, \ldots, 10$, számok kék színűek.**

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy egyszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy $k$-szor húzunk piros számot?

38. **Egy dobozban $N$ darab cédula van, $1$-től $N$-ig megszámozva. $n$-szer húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy $N = A + B$, és hogy a cédulákon lévő számok közül az első $A$ darab piros színű, a többi $B$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, A$ számok piros színűek, az $A+1, A+2, \ldots, A+B$ számok kék színűek.**

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy egyszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy $k$-szor húzunk piros számot?

## 15. Két szín van. Visszatevéssel húzunk.Valószínűséget számolunk

39. **Egy dobozban $10$ darab cédula van, $1$-től $1$-ig megszámozva. $3$-szor húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $4$ darab piros színű, a többi $6$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, 3, 4$ számok piros színűek, az $5, 6, 7, 8, 9, 10$, számok kék színűek.**

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy egyszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan kétszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy háromszor húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy $k$-szor húzunk piros számot?

40. **Egy dobozban $50$ darab cédula van, $1$-től $50$-ig megszámozva. $10$-szer húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $20$ darab piros színű, a többi $30$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, 20$ számok piros színűek, a $21, 22, \ldots, 10$, számok kék színűek.**

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy egyszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan kétszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan háromszor húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy $k$-szor húzunk piros számot?

41. **Egy dobozban $N$ darab cédula van, $1$-től $N$-ig megszámozva. $n$-szer húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy $N = A + B$, és hogy a cédulákon lévő számok közül az első $A$ darab piros színű, a többi $B$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, A$ számok piros színűek, az $A+1, A+2, \ldots, A+B$ számok kék színűek.**

Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy egyszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan kétszer húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan háromszor húzunk piros számot?

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$-szor húzunk piros számot?

## 16. Három szín van. Visszatevés nélkül húzunk. Valószínűséget számolunk

42. **Egy dobozban $60$ darab cédula van, $1$-től $60$-ig megszámozva. $10$-szor húzunk visszatevés nélkül. A húzások sorozatából egy $10$ hosszúságú számsorozat adódik.**

    Hány ilyen sorozat létezik?

    **Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $15$ darab piros színű, a következő $20$ darab fehér színű, az utolsó $25$ darab zöld színű. azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, 15$ számok piros színűek, a $16, 17, , , , 35$, számok kék színűek, a $36, 37, , , , 60$ számok kék színűek.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy egyszer húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$-szor húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk fehér számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$-szor húzunk fehér számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk zöld számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$-szor húzunk zöld számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 2-szer húzunk pirosat, 3-szor fehéret és 5-ször zöldet?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $i$-szer húzunk pirosat, $j$-szor fehéret és $k$-ször zöldet? Milyen feltételnek kell teljesülni $i$-re, $j$-re és $k$-ra, hogy ez a valószínűség 0-tól különböző lehessen?

## 17. Három szín van. Visszatevéssel húzunk. Valószínűséget számolunk

43. **Egy dobozban $10$ darab cédula van, $1$-től $10$-ig megszámozva. $3$-szor húzunk visszatevéssel. Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $4$ darab piros színű, a többi $6$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, 3, 4$ számok piros színűek, az $5, 6, 7, 8, 9, 10$, számok kék színűek.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy $k$-szor húzunk piros számot?

44. **Egy dobozban $50$ darab cédula van, $1$-től $50$-ig megszámozva. $10$-szer húzunk visszatevéssel. Tegyük fel, hogy a cédulákon lévő számok közül az első $20$ darab piros színű, a többi $30$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, 20$ számok piros színűek, a $21, 22, \ldots, 10$, számok kék színűek.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy $k$-szor húzunk piros számot?

45. Egy **dobozban $N$ darab cédula van, $1$-től $N$-ig megszámozva. $n$-szer húzunk visszatevéssel. Tegyük fel, hogy $N = A + B$, és hogy a cédulákon lévő számok közül az első $A$ darab piros színű, a többi $B$ darab kék színű, azaz a cédulákon az $1, 2, \ldots, A$ számok piros színűek, az $A + 1, A + 2, \ldots, A + B$ számok kék színűek.**

    Mi a valószínűsége annak, hogy sosem húzunk piros számot?

    Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $k$-szor húzunk piros számot?

## 18. Vegyes feladatok. Valószínűséget számolunk

46. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?

47. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

48. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?

49. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy van köztük fej?

50. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?

51. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

52. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?

53. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 3 véletlenszerűen választot ember között van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?

54. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 4 véletlenszerűen választot ember között van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik?

55. *Vajon milyen sok embert kell választani ahhoz, hogy annak az esélye, hogy az emberek között van legalább két olyan, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik, már nagyobb legyen annál, hogy nincsenek ilyen emberek?*

    Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy $k$ darab véletlenszerűen választot ember között van legalább két olyan, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik? Találja meg a helyes képletet, majd kalkulátorral vagy valamilyen számítógépes programmal (például Excellel) készítsen táblázatot és grafikont $1 < k < 30$-ra. Meg fog lepődni!

56. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón pontosan két találatunk lesz?

57. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón pontosan $k$ találatunk lesz?

58. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az hatos lottón pontosan $k$ találatunk lesz?