

4. gyakorlat

Matematika A4

Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007.10.1, 3.

1. Poisson eloszlás

Ha az X valószínűségi változó a $0, 1, 2, \dots$ értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük. Várható értéke λ .

Feladatok:

1. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tüzeset van? (Számoljuk ki az eddig tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)
2. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.
3. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.
4. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?
5. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhiba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhiba van?
6. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.
 - a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
 - b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?
 - c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?
7. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalálatos szelvény lesz?
8. A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullancsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a verse yzók közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.
9. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Adjon becslést (lehetőleg élel) annak a valószínűségére, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt .

10. Ha Galyatetőről augusztusban éjfél körül átlagosan 10 percenként lehet csillaghullást látni, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy 10 perc alatt 2 csillaghullást islátunk?
11. Ha naponta Pesten átlagosan 2, 5 súlyos baleset történik, Budán pedig csak 1, 6, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy Budapesten egy nap nincs egyetlen baleset sem? Hány baleset a legvalószínűbb Budapesten?

2. Várható érték

X várható értéke **diszkrét** esetben:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_x xp(x)$$

avagy a szummát más jelölésekkel írva:

$$\mathbf{E}(X) = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + x_3p(x_3) + \dots$$

Feladatok:

12. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?
13. A diszkrét P eloszlás tagjai: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x=1,2,3,4$). Mennyi az eloszlás várható értéke?
14. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?
15. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő: $xk = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ és $pk = \frac{1}{2^k}$. Igazolja, hogy nincs várható értéke!
16. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?
17. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeketa lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvényvel fogadva, nyereségünk várható értéke?
18. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?
19. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzüsszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?
20. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X -szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a.) Adjuk meg a X valószínűségi változó eloszlását. b.) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét.
21. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p , illetve $q (=1-p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?
22. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?
23. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.

- a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?
- b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?
24. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?
25. Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-t vagy 2-t dob ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli 6-t dob ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszerre dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem előlről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?
26. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!
27. Mennyi a lottón a találatok számának várható értéke?
28. Nevezetes eloszlások esetén mennyi a várható érték (binomiális, poisson, geometriai)?