5. gyakorlat

Matematika A4
Gyakorlatvezetők: Vetier András, Móra Péter

2007.10.15, 17.

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az F **eloszlásfüggvény**nek egy x pontban felvett $F(x)$ értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x számnál kisebb értéket:

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x)$$

Tetszőleges zárt $[a, b]$ vagy nyílt (a, b) intervallum esetén az **intervallumba esés** valószínűsége kifejezhető az eloszlásfüggvény segítségével:

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\mathbf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

A félév során csak olyan folytonos eloszlásokkal fogunk foglalkozni, melyekre az eloszlásfüggvény véges sok hely kivételével deriválható (a mérnöki gyakorlatban fontos eloszlások ilyenek). A deriváltat $f(x) = F'(x)$-szel jelöljük és **sűrűségfüggvény**nek hívjuk.

Tetszőleges zárt $[a, b]$ vagy nyílt (a, b) intervallum esetén az **intervallumba esés** valószínűsége kifejezhető a sűrűségfüggvény segítségével is:

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(Természetesen félig nyílt, félig zárt intervallumokra is igazak a megadott képletek.)

Az **eloszlásfüggvény** jellemzői:

1. $(-\infty)$-ben 0-hoz tart,
2. ∞-ben 1-hez tart,
3. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
4. folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye mindenhol folytonos.

A **sűrűségfüggvény** jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény **kapcsolata**:

1. minden x-re $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$

   (A két integrál képlet közül a második egy kicsit pongyola, mert az x betűt két különböző szerepben is használja. Mégis, sok előny is fakad abból, hogy az x betűt helyett nem használunk t betűt.).

2. $F'(x) = f(x)$ minden olyan x-re, ahol $f(x)$ folytonos.

2. Várható érték

X várható értéke **diszkrét** esetben:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_x xp(x)$$

avagy a szummát más jelölésekkel írva:

$$\mathbf{E}(X) = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + x_3p(x_3) + \dots$$

X várható értéke **folytonos** esetben:

$$\mathbf{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

3. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változót **örökifjú tulajdonságú**nak nevezünk, ha teljesül rá a következő:

$$\mathbf{P}(X > a + b | X > a) = \mathbf{P}(X > b)$$

teljesül minden pozitív a és b esetén. Ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó tárgy "él", a további jövőjét illetőleg esélyei ugyanolyanok, mint egy ugyanilyen típusú "újszölött" tárgynak.

Fontos tény, hogy egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

A λ-paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$, azaz a λ paraméter a várható érték reciproka. (Tehát a várható érték és a paramétere egymásnak reciprokai.)

4. Feladatok

1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény (ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0):

   a)
   $$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$

   b)
   $$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

   c)
   $$H(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

   d)
   $$I(x) = \frac{x}{4}(4-x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

2. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0):

   a)
   $$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

   b)
   $$g(x) = \frac{sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

   c)
   $$h(x) = \frac{1}{3}sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1}ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

   d)
   $$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

3. Tegyük fel, hogy egy r-sugarú céltáblán a találat helye egyenletes eloszlású. A találatnak a középponttól való távolsága legyen X. Határozza meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét, továbbá X várható értékét.

4. Határozza meg az alábbi X valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét (ahol RND - számítógép által generált - egyenletes eloszlású valószínűségi változót jelent 0 és 1 között):

   a) $X = 3RND$
   b) $X = 1 - RND$
   c) $X = (-3)RND$
   d) $X = 3RND + 7$
   e) $X = cRND + d$
   f) $X = cRND^n + d$
   g) $X = 2\pi RND$

h) $X = sin(2\pi RND)$

5. Határozza meg az alábbi valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét (ahol RND_1 és RND_2 - számítógép által generált - független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókat jelentenek 0 és 1 között):

   a) $X = RND_1 + RND_2$
   b) $X = 2RND_1 + 3RND_2$
   c) $X = 3RND_1 - 2RND_2$
   d) $X = RND_1 * RND_2$
   e) $X = RND_1/RND_2$

6. Az előző feladatokban kapott eloszlásfüggvényekre ellenőrizze, hogy tényleg teljesülnek az eloszlásfüggvények fentebb felsorolt tulajdonságai.

7. Az előző feladatokban kapott sűrűségfüggvényekre ellenőrizze, hogy tényleg teljesülnek a sűrűségfüggvények fentebb felsorolt tulajdonságai.

8. Az előző feladatokban definiált X valószínűségi változóknak mennyi a várható értéke? És X^2 várható értéke?

9. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül kijelölünk 2 pontot. Mi a nagyság szerinti

   a) nagyobbik,
   b) kisebbik

   eloszlás- és sűrűségfüggvénye, illetve várható értéke?

10. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül kijelölünk 3 pontot. Mi a nagyság szerinti

    a) legnagyobb,
    b) középső,
    c) legkisebb

    eloszlás- és sűrűségfüggvénye, illetve várható értéke?

11. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti második legnagyobb, eloszlás- és sűrűségfüggvénye, illetve várható értéke?

12. Egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot a $[0, 1]$ intervallumban, ennek köbét jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X < 0{,}5$? Mi lesz X eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Milyen x-re lesz $F(x) = 0{,}5$?

13. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-t/8}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több, mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

14. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha az alkatrészt január 26-án (a születésnapomon) hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik alkatrészt érdemesebb megvenni? Azt, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ha $x > 1$, vagy ezt? Átlagosan mennyit bír a kétféle minőségű alkatrész?

15. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mennyi ennek az alkatrésztípusnak az átlagos élettartama? Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

16. A teás-bögrék élettartama örökifjú tulajdonságú. (Miért?) Családunkban az átlagos élettartamuk csak 5 hónap. Mekkora a valószínűsége, hogy egy vadonat új teás-bögre 1 évet is túlél? Kedvenc bögrém már 2 és fél éves. Mekkora a valószínűsége, hogy 1 év múlva is ihatok belőle?

17. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy eloszlás.)*

18. Egyenletesen választunk egy pontot az egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0{,}5, 0{,}5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az árkusz szinus-eloszlás.)*

19. Egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0{,}5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Milyen x-re lesz $F(x) = 0{,}5$, vagyis mennyi, az X valószínűségi változó mediánja?