Matematika B4
XI. gyakorlat

2005. november 16., 18.

1. Folytonos valószínűségi változók transzformációi

$y = a + bx$ egy lineáris transzformáció. Ha $Y = a + bX$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(Y)$, akkor:

$$G(y) = \left\{ \begin{array}{cc} F(x) = F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b > 0 \\ 1 - F(x) = 1 - F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b < 0 \end{array} \right\}$$

$$g(y) = \frac{f(\frac{y-a}{b})}{|b|}$$

Ha t függvény monoton növekvő, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y))$$

$$g(y) = f(t^{-1}(y))\left[t^{-1}(y)\right]'$$

És az általános képlet, ha t monoton növő és monoton csökkenő darabokból áll:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) + \cdots + g_i(y)$$

ahol $g_j(y)$ a t függvény j. darabjából adódó sűrűségfüggvény.

És egy fontos dolog: ha X tetszőleges valószínűségi változó, $F(x)$ az eloszlásfüggvénye, akkor $F^{-1}(RND)$ Y-nal megegyező eloszlású. Ezt felhasználva generálhatunk tetszőleges eloszlású valószínűségi változót!
Feladatok:

1. Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0,1]$, egyébként 0.
   a) Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Hogyan változott a várható érték és szórás?
   b) Lineáris transzformáció segítségével standardizáljuk X eloszlását, azaz találjunk egy olyan $t(x) = a + bx$ függvényt, hogy $t(X) = a + bX$ valószínűségi változó 0 várható értékű, és 1 szórású legyen.

2. RND egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Keressünk alkalmas t függvényt, hogy $Y = t(RND)$
   a) 2 paraméterű exponenciális eloszlású legyen.
   b) $x \in [10,30]$-on egyenletes eloszlású legyen.
   c) Oldjuk meg a fenti feladatokat úgy is, hogy t-t monoton csökkenőnek válasszuk!

3. A zsebszámológép RND gombja és egy transzformáció segítségével generáljunk három $CAUCHY$ eloszlású pontot. (Segítségül a $CAUCHY$ eloszlás eloszlásfüggvénye: $\frac{1}{2} + \frac{ArcTan(x)}{\pi}$)

4. Legyen X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Határozzuk meg $x^{1/2}$, x^2, $x^{-1/2}$, x^{-1}, x^{-2} eloszlását. Hogyan változik a várható érték és szórás?

5. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása? Hogyan tudnánk ilyen eloszlást gyártani a már meglévő eloszlásból?

6. Legyen X 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mi lesz X^k eloszlása? Mi lesz az új várható érték, és az új szórás?

7. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5,8]$ intervallumon.
   a) Számoljuk ki $|X-6|$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
   b) Számoljuk ki X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

8. A $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ csúcsú háromszögen vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

9. Legyen (X,Y) eloszlás egyenletes az egységnégyzeten. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

10. Vegyünk egy két dimenziós (X,Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

2. Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \cap Y = l-k)$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X+Y=l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = l-k)$$

Például ha X, Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint:

$$P(\text{dobások összege } = 8) = P(X=2)P(Y=6) + P(X=3)P(Y=5) + \\ P(X=4)P(Y=4) + P(X=5)P(Y=3) + P(X=6)P(Y=2)$$

Ugyanilyen logikával számoltunk a félév elején.
Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, és $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

Feladatok:

11. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0,1]$-en, és összeadom őket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!

12. Számoljuk ki egy $[0,2]$-n és egy $[0,3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.

13. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor ezt nevezzük $GAM(\lambda, 2)$ eloszlásnak.)

14. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás különbségének eloszlását! (A számolásnál különböztessük meg, ha λ_1 és λ_2 különbözőek, illetve megegyeznek.

15. Határozzuk meg két standard normális eloszlás konvolúcióját!

Házi feladat:

16. Válasszunk 4 db pontot a $[0, 1]$-en egymástól függetlenül. A második legnagyobb pont helyét jelöljük X-szel. Mi lesz X eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye? És X^3-é?

17. Számoljuk ki 3 db λ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! *Útmutatás:* Kettőre már kiszámoltuk, konvolváljunk az eredményhez még egy λ paraméterű exponenciális eloszlást.

18. * Számoljuk ki n db λ paraméterű exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! (Használjunk indukciót!)

19. X és Y egymástól független valószínűségi változók, melyek egyenletes eloszlásúak az $[1, 5]$ intervallumon. Vezessük le $X - Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

20. A $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ csúcsú háromszögen vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

21. Számoljuk ki $X - Y$ sűrűségfüggvényét, ha

    a) X és Y egymástól független 2 paraméterű exponenciális eloszlás.

    b) X λ paraméterű, Y μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.