Matematika B4
XI. gyakorlat

2005. november 23.

1. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x,y) \geq 0$, minden x, y valós számra.
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x,y)dxdy$$

Feladatok:

1. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)

   $$f(x,y) = \frac{4}{5}(x+xy+y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

   Megoldás: f(x,y) nemnegatív, és

   $$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{4}{5}(x+xy+y)dxdy = \frac{4}{5}\int_0^1 (\frac{1}{2}+\frac{y}{2}+y)dy = \frac{4}{5}\int_0^1 \frac{1}{2}+\frac{3y}{2}dy = \frac{4}{5}(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}) = 1,$$

   tehát ez egy sűrűsségfüggvény.

   b)

   $$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

   Megoldás: Ez pont két független λ paraméterű exponenciális eloszlás együttes sűrűsségfüggvénye, tehát az.

c)

$$f(x,y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

Megoldás: $f(0,0) = -10 < 0$*, tehát nem az.*

d)

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

Megoldás: f(x,y) nyílván nem-negatív, és

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) dy dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \frac{1}{x} dy dx = \int_{x=0}^{1} \frac{x}{x} dx = \int_{x=0}^{1} 1 \, dx = 1,$$

tehát ez is sűrűsségfüggvény.

2. Határozzuk meg c-t úgy, hogy f(x,y) sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x,y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1$$

Megoldás: f(x,y) nemnegatív pontosan akkor, ha c nemnegatív. A másik feltétel, hogy integrálja 1, azaz

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1-y} c \cdot y \, dx dy = c \int_{y=0}^{1} y(1-y) \, dy = \frac{c}{6},$$

amiből c=6.

3. Vegyük az első feladat b.) részében megadott $f(x) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$

Megoldás:

$$P = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx \cdot \int_0^1 \lambda e^{-\lambda y} dy = (1 - e^{-\lambda})^2$$

b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$

Megoldás:

$$P = \int_{y=2}^{8} \int_{x=1}^{5} f(x,y) dx dy = \int_1^5 \lambda e^{-\lambda x} dx \cdot \int_2^8 \lambda e^{-\lambda y} dy = (e^{-\lambda} - e^{-5\lambda})(e^{-2\lambda} - e^{-8\lambda})$$

c) $0 < X < 1$

Megoldás:

$$P = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1} \lambda e^{-\lambda x} dx \cdot \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda}$$

d) $3 < Y < 5$

Megoldás:

$$P = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=3}^{5} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \cdot \int_{3}^{5} \lambda e^{-\lambda y} dy = e^{-3\lambda} - e^{-5\lambda}$$

4. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 \cdot RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket: $A = \{X > \frac{1}{2}\}$ és $B = \{Y < \frac{1}{2}\}$.

a) Előadáson szerepelt, de gondoljuk át még egyszer, hogy ennek a sűrűsségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

Megoldás: Hasonlóan megy, mint pl. következő feladatnál.

b) $P(A) =?$

Megoldás:

$$P(A) = \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \int_{y=0}^{x} \frac{1}{x} dydx = \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} 1dx = \frac{1}{2}$$

c) $P(B) =?$

Megoldás:

$$P(B) = \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \int_{x=y}^{1} \frac{1}{x} dxdy = \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} -lny dx = \frac{1+ln2}{2}, \quad mivel \int lny dy = ylny - y + c,$$

és $\quad -ln\frac{1}{2} = ln2$.

d) $P(A$ és $B) =?$

Megoldás:

$$P(A \cdot B) = \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \int_{y=0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dydx = \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2x} dx = \frac{ln2}{2}$$

e) $P(A|B) = ?$

Megoldás: $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{ln2}{1+ln2}$

f) $P(B|A) = ?$

Megoldás: $P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = ln2$

5. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

Megoldás: Legyen $A = RND_1$ és $B = RND_2$. Ekkor határozzuk meg $(\sqrt{A}, \sqrt{A} \cdot B)$ eloszlását (itt most x,y tekinthetőek konstansnak,a és b pedig A ill. B futó indexe).

$$F(x, y) = P(\sqrt{A} < x, \sqrt{A} \cdot B < y) = y^2 + \int_{y^2}^{x^2} \frac{y}{\sqrt{a}} da = 2yx - y^2,$$

mivel a terület határoló egyenlőtlenségek: $\sqrt{a} < x$ és $\sqrt{a}b < y$, azaz átrendezve: $a < x^2$ és $b < \frac{y}{\sqrt{a}}$
Ezt lederiválva x majd y szerint $f(x, y) = 2$ adódik a megfelelő (háromszög) területen.

b) $P(Y < \frac{1}{4}) = ?$

Megoldás: $P = \frac{7}{16}$, *lesz általánosan.*

c) $P(Y < c) = ?$

Megoldás:

$$P = \int_{y=0}^{c} \int_{x=y}^{1} 2dxdy = \int_{y=0}^{c} 2(1-y)dy = 2c - c^2$$

6. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^2.$$

a) Igazoljuk, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!

Megoldás: A nemnegatívitás triviális, valamint

$$P = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y}} dydx = \int_{x=0}^{1} 2xdx = 1$$

, tehát valóban sűrűsség függvény.

b) $P(X + Y < 1) = ?$

Megoldás: Először is számitsuk, ki hol metszi egymást $x + y = 1$ és $y = x^2$ egyenlőségek: $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ És így a keresett valószínűség:

$$\int_{x=0}^{x_0} \int_{y=0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y}} dydx + \int_{x=x_0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \frac{1}{\sqrt{y}} dydx = x_0^2 + \frac{4}{3}(1 - x_0)^{\frac{3}{2}}$$

c) $P(X < c) = ?$

Megoldás:

$$P = \int_{x=0}^{c} \int_{y=0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y}} dy dx = \int_{x=0}^{c} 2x dx = c^2$$

d) $P(Y < d) = ?$

Megoldás:

$$P = \int_{y=0}^{d} \int_{x=\sqrt{y}}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}} dx dy = \int_{y=0}^{d} \frac{1}{\sqrt{y}} - 1 dy = 2\sqrt{d} - d$$

2. 2-dimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A t(X,Y) valószínűségi változó várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \cdot f(x,y) dx dy$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy$$

Feladatok:

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.

a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

Megoldás: Legyen $A = RND_1$ és $B = RND_2$. Ekkor határozzuk meg $(\sqrt{A}, \sqrt{A} \cdot \sqrt{B})$ eloszlását (itt most x,y tekinthetőek konstansnak,a és b pedig A ill. B futó indexe).

$$F(x,y) = P(\sqrt{A} < x, \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} < y) = y^2 + \int_{y^2}^{x^2} \frac{y^2}{a} da = y^2 + y^2 \ln \frac{x^2}{y^2},$$

mivel a terület határoló egyenlőtlenségek: $\sqrt{a} < x$ és $\sqrt{a \cdot b} < y$, azaz átrendezve: $a < x^2$ és $b < \frac{y^2}{a}$
Ezt lederiválva x majd y szerint $f(x,y) = 4\frac{y}{x}$ adódik a megfelelő (háromszög) területen.

b) Legyen $t(x,y) = xy$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

Megoldás:

$$E(X \cdot Y) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} xy \cdot 4\frac{y}{x} dy dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} 4y^2 dy dx = \int_{x=0}^{1} \frac{4}{3} x^3 dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

c) Legyen $t(x,y) = xy^2$. Mennyi $t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értéke?

Megoldás:

$$E(X \cdot Y^2) = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} xy^2 \cdot 4\frac{y}{x} dydx = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} 4y^3 dydx = \int\limits_{x=0}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}$$

8. Mennyi az 1.a.), ill. 4. feladatban szereplő eloszlások szorzatának várható értéke?

Megoldás:

$$E(X \cdot Y) = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} xy \cdot \frac{4}{5}(x + xy + y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} \frac{4}{15}y + \frac{2}{3}y^2 dy = \frac{16}{45} \quad , illetve$$

$$E(X \cdot Y) = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} xy \cdot \frac{1}{x} dydx = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} ydydx = \int\limits_{x=0}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6}$$

3. Feltételes eloszlás

A legfontosabb az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d | X = x) = \int\limits_{c}^{d} f_{2|1}(y|x)dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

9. Vegyük ismét a 4.feladatban szereplő eloszlást!

   a) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$

   Megoldás: $P = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$*, lásd a lenti indoklást.*

   b) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$

   Megoldás: $P = \frac{0.1}{0.8} = \frac{1}{8}$*, lásd a lenti indoklást.*

   c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = c) = ?$

   Megoldás: Általánosan c>0.4-re:

$$P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = \frac{\int_{0.3}^{0.4} 1/xdy}{\int_{0}^{c} 1/xdy} = \frac{0.4 - 0.3}{c} = \frac{0.1}{c}$$

10. Vegyük ismét a 4.feladatban szereplő eloszlást!

   a) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$

   Megoldás: $P = \frac{ln\frac{7}{5}}{ln10}$*, lásd a lenti indoklást.*

b) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = 0.4) =?$

Megoldás: $P = \frac{ln\frac{7}{5}}{ln\frac{5}{2}}$*, lásd a lenti indoklást.*

c) $P(X \in (0.5, 0.7)|Y = d) =?$

Megoldás: Általánosan d<0.5-re:

$$P(X \in (0.5, 0.7)|Y = d) = \frac{\int\limits_{0.5}^{0.7} 1/xdx}{\int\limits_{d}^{1} 1/xdx} = \frac{ln0.7 - ln0.5}{ln1 - lnd} = \frac{ln\frac{7}{5}}{ln\frac{1}{d}}$$

11. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

a) $P(X + Y < 3) =?$

b) $P(X + Y < z) =?$

c) $P(X + Y < 3|X < 2) =?$

d) $P(2 < X + Y < 3|Y > 1) =?$

Megoldás: Hasonlóan kell mint a 4. feladatot, csak itt $f(x, y) = 4e^{-2(x+y)}$*, és más területeken kell értelem szerint integrálni..*

4. Függetlenség

Akkor független két valószínűségi változó, ha minden x-re és y-ra fennáll, hogy

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(x, y) = f_2(y) \quad , ill. \quad f_{1|2}(x, y) = f_1(x)$$

Feladatok:

12. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = \frac{1}{9}xy \quad \text{, ha} \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3$$

a) Független-e X és Y?

Megoldás: Független hiszen f(x,y) szorzatra bomlik.

b) $P(X < u, Y < v) =?$, ahol $0 < u < 2$ és $0 < v < 3$.

Megoldás:

$$\int\limits_0^u \int\limits_0^v \frac{1}{9}xydydx = \frac{u^2v^2}{36}$$

.

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 24xy \quad \text{, ha} \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

a) Független-e X és Y?

Megoldás: Nem függetlenek, hiszen a sűrűsségfüggvény tartója (ahol pozítiv az értéke) nem téglalap alakú.

b) $P(X < u, Y < v) =?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

Megoldás:

$$\int_0^u \int_0^v 24xydydx = 6u^2v^2$$

.

14. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = 1 \quad \text{, ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) =?$

Megoldás: Az eloszlás egyenletes, hiszen f konstans.
Ha $x < \frac{1}{4}$, akkor $P = x/2$.
Ha $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, akkor $P = \frac{3}{16} - (\frac{1}{2} - x)^2$.

b) Független-e X és Y?

Megoldás: Nem függetlenek, hiszen a sűrűsségfüggvény tartója (ahol pozítiv az értéke) nem téglalap alakú.