Matematika B4
III. gyakorlat

2005. március 3.

1. Bevezető kérdések

1. Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Tekintsük az alábbi 3 eseményt: a piros kockával párosat dobunk, a kék kockával párosat dobunk, a dobott összeg páros. Függetlenek-e ezek az események?

   Megoldás: "Piros és Kék"-re: $P(P) = \frac{1}{2}$, $P(K) = \frac{1}{2}$, $P(P\&K) = \frac{1}{4}$. *Azaz* $P(P) \cdot P(K) = P(K\&P)$. *Tehát függetlenek.*
   Hasonlóképpen belátható, hogy Piros és Összeg, Kék és Összeg is függetlenek.
   Ám a 3 együtt már nem független, hiszen bármelyik 2 meghatározza a harmadikat.

2. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?

      Megoldás: Geometriai(optimista)

   b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?

      Megoldás: Binomiális

   c) a 12. autó a harmadik piros?

      Megoldás: Negatív binomiális

2. Független események

A és B esemény függetlenek, ha teljesül, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$. Több esemény akkor független, ha nem csak az teljesül, hogy

$$P(A_1A_2A_3\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\dots P(A_n)$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például a következő esetben:

$$P(\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}\ \overline{A_4}\dots A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})\dots P(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van.

Feladatok:

3. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Bizonyítsa be, hogy $\{A, B, C\}$ eseményrendszer bár páronként független eseményekből áll, teljesen nem független!

   Megoldás: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$. $P(A\&B) = \frac{1}{4}$, $P(A\&C) = \frac{1}{4}$, $P(B\&C) = \frac{1}{4}$. *Így páronként függetlenek, ám bármely kettő meghatározza a harmadikat, így teljesen nem független.*

4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Az alábbi betűkkel jelöljük a következő eseményeket: $A =$\{ a dobott számok összege 7 \}, $B =$\{ legalább az egyik kockán van hatos \}, $C =$\{ mindkét kockával páratlant dobok \}, $D =$\{ a két kockával különböző számokat dobok \}, $E =$\{ a zöld kockával 4-est dobok \}.
   Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

   a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?

      Megoldás: $P(A) > 0$ *és* $P(C) > 0$, *ám* $P(A\&C) = 0$, *így nem függetlenek.*

   b) Kizáróak-e az A és C események?

      Megoldás: Igen.

   c) Mennyi a B esemény valószínűsége? És mennyi a B valószínűsége, feltéve, hogy A bekövetkezett?

      Megoldás: $P(B) = \frac{11}{36}$ *ill.* $P(B|A) = \frac{2}{6}$.

   d) Hogy viszonul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

      Megoldás: A része D-nek(ha A teljesül, akkor D is), amiből $P(A) < P(B)$

   e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?

      Megoldás: Igen

   f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

      i. függetlenek, de nem kizáróak,

         Megoldás: A-E

      ii. kizáróak, de nem függetlenek.

         Megoldás: A-C

3. Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások

1. *Indikátor eloszlás*:
   Egyetlen A kisérletet vegyünk és azt nézzük, hogy hányszor következik be. Mivel egyetlen egyszer végezzük el a kísérletet, ezért a bekövetkezések számát X-szel jelölve két eset lehetséges: A bekövetkezik, azaz $X = 1$ vagy $\overline{A}$ következik be, azaz $X = 0$. Ezekre a valószínűség legyen: $P(X = 1) = p$ és $P(X = 0) = 1 - p$
   Például: egy kockadobással kapcsolatban A a hatos dobás eseménye, akkor $P(A) = \frac{1}{6}$, vagyis $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ és $P(X = 0) = \frac{5}{6}$.

2. *Egyenletes eloszlás*:
   n érték közül mindegyik ugyanakkora valószínűséggel, vagyis $\frac{1}{n}$ valószínűséggel következik be. Például egy szabályos kockával való dobás értékei: $P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = 6) = 1/6$

3. *Hipergeometrikus eloszlás*:
A piros, és B fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k db piros golyót húzzunk ki:

$$P(X=k)=h_{A,B,n}(k)=\frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

Például: A 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

4. *Binomiális eloszlás*:
Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Például: Pontosan 3 hatost dobunk 20 dobásból: $P(X=3)=\binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$

5. a) *Geometriai eloszlás (optimista)*:
Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X=k)=(5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p:
$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

   b) *Geometriai eloszlás (pesszimista)*:
Hányat dobok az első hatos dobás előtt? $P(X=k)=(5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p: $P(X=k)=(1-p)^kp$.

6. a) *Negatív binomiális eloszlás (optimista)*:
Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X=k)=\binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6)=$
$\binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban: NBIN($l,p$): siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérlet elvégezni, hogy megkapjuk az l-edik sikert. $P(X=k)=\binom{k-1}{l-1}p^l(1-p)^{k-l}$

   b) *Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)*:
Hányat dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X=k)=\binom{k}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-2}(1/6)=$
$\binom{k}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-2}$. Általánosabban: NBIN($l,p$): siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hány kísérlet előzi meg az l-edik sikert. $P(X=k)=\binom{k}{l-1}p^l(1-p)^{k-l+1}$

Feladatok:

5. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.

   a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt kidobnánk a 12-t?

   Megoldás: Geometriai(pesszimista). A siker valószínűsége: $p=\frac{1}{36}$. *Így* $P=(\frac{35}{36})^8\cdot\frac{1}{36}$.

   b) Mennyi a valószínűsége, hogy nyolcszor dobunk a kockákkal?

   Megoldás: Geometriai(optimista). A siker valószínűsége: $p=\frac{1}{36}$. *Így* $P=(\frac{35}{36})^7\cdot\frac{1}{36}$.

6. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

   a) pont k-szor dobunk a fej előtt?

   Megoldás: Geometriai(pesszimista). Így $P=(1-p)^k\cdot p$.

b) pont k-szor dobunk az érmével?

Megoldás: Geometriai(optimista). Így $P = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

7. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

   Megoldás: Komplementerrel: $P_1 = 1 - (\frac{99}{100})^{50}$. *Rögzitsük a kulcsokat, ekkor annak a valószínűsége, hogy a jó az első 50-ben van:* $P_2 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

8. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor az az előző eredménytől különbözne?

   Megoldás: Negativ binomiális: $P = \binom{11}{2}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^9$.

9. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűséggel megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell?

   Megoldás: Binomiális: $P = \binom{10}{8}(0,6)^8(0,4)^2 + \binom{10}{9}(0,6)^9(0,4) + \binom{10}{10}(0,6)^{10}$.

10. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

    a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?

       Megoldás: $P = (1 - 0,2 \cdot 0,95)^5 = 0,81^5$.

    b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?

       Megoldás: Binomiális: $P = \binom{5}{2}(0,19)^2(0,81)^3$.

    c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?

       Megoldás: P=(P(volt villamoson ellenőr és nem büntette meg)/P(nem büntette meg))$^5 = (\frac{0,2 \cdot 0,05}{1-0,2\cdot 0,95})^5 = (\frac{0,01}{0,81})^5$.

    d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?

       Megoldás: Negatív binomiális: $P = \binom{3}{1}(0,19)^2(0,81)^2$.

11. Egy rozsomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra lép. 20 lépés megtétele után

    a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?

       Megoldás: Binomiális: 10 lépést ment balra, 10 lépést ment jobbra, így $P = \binom{20}{10}(0,5)^{10}(0,5)^{10} = \frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}$.

    b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?

       Megoldás: 20 lépés után páros mezőn kell állnia, így $P = 0$.

    c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?

       Megoldás: Nyílván akkor, ha az utolsó lépésben jobbra lép, azaz $P = \frac{1}{2}$.

12. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot, egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. $P(X = 7) =$?

    Megoldás: Hipergeometrikus: $P = \frac{\binom{17}{7}\binom{13}{5}}{\binom{30}{12}}$.

13. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza ebből 30 fehér. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vedég kap neki megfelelő itókát?

    Megoldás: Hipergeometrikus: $P = \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{7}}{\binom{80}{10}}$.

14. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

    Megoldás: Bayes+Binomiális: $P = \frac{\binom{30}{25}(\frac{3}{4})^{25}(\frac{1}{4})^5}{\binom{30}{25}(\frac{3}{4})^{25}(\frac{1}{4})^5+\binom{30}{25}(\frac{1}{2})^{25}(\frac{1}{2})^5} = \frac{3^{25}}{3^{25}+2^{30}}$.

Házi feladat

15. Háromszor dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások száma között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól?

    Megoldás: Az eseménytér: { I I I , I I F , I F I , F I I , I F F , F I F , F F I , F F F }
    Innen $P(A) = \frac{6}{8}$, $P(B) = \frac{4}{8}$, $P(A\&B) = \frac{3}{8}$. *Mivel* $P(A\&B) = P(A) \cdot P(B)$, *így függetlenek.*

16. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?

    Megoldás: Binomiális: $P = \binom{6}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^2$. *Ha 2-nél többet, de nem az összeset találom el, akkor a találatok száma lehet 3, 4, vagy 5 azaz* $P = \binom{6}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^3 + \binom{6}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^2 + \binom{6}{5}(\frac{2}{3})^5(\frac{1}{3})$.

17. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

    Megoldás: ld.: 4. feladatsor 5. feladat

18. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?

    Megoldás: Hipergeometrikus eloszlás: $P(X = k) = \frac{\binom{8}{k}\cdot\binom{14}{7-k}}{\binom{22}{7}}$. *Konkrétan* $P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{14}{5}}{\binom{22}{7}}$.

19. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?

    Megoldás: a) $P = 0,6 \cdot 0,7$ *b)*$P = 1 - 0,4 \cdot 0,3$ *c)*$P = 0,6 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,4$ *d)* $P = 0,4 \cdot 0,3$.

20. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

   Megoldás: Binomiális: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$*, ahol p=2%.*

b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

   Megoldás: Negatív binomiális(pesszimista): $P(X = k) = \binom{k}{n-1} p^n (1 - p)^{k-n+1}$

c) hány terméket szállított két leállás között?

   Megoldás: Geometriai(pesszimista): $P(X = k) = q^k p$.

d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)

   Megoldás: Geometriai(pesszimista): $P(X = k) = p^k q$.

21. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 200 db szék van.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék?

   Megoldás: Binomiális/Poisson: Poissonnál $\lambda = 400 \cdot 0,6 = 240$. $P(X \leq 200) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots P(X = 200)$.

b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?

   Megoldás: 400 szék kell, hogy mindenki biztosan le tudjon ülni, hiszen $0,6^{400}$ *a valószínűsége, hogy mind a 400 bejön órára, ami nagyobb, mint 0.*

c) Hány szék kell, hogy legalább 0,99 valószínűséggel jusson mindenkinek szék?

   Megoldás: Geometriai(pesszimista): $P(X \leq k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots P(X = k) \geq 0,99$. *egyenlőséget kell megoldani k-ra. Elkezdjük a valószínűségeket összeadni addig, amíg az összeg meg nem haladja 0,99-t.*

22. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom Nektek. 30 dobás után el kell döntenetek, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznátok meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnétek?)

Megoldás: Bayes+Binomiális: Annak a valószínűsége, hogy cinkelt az érme feltéve, hogy k fejet dobtunk (14. feladatból). $P(X = k) = \frac{\binom{30}{k}(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{30-k}}{\binom{30}{k}(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{30-k} + \binom{30}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{30-k}} = \frac{3^k}{3^k + 2^{30}} \geq \frac{1}{2}$*, milyen k-ra. Ebből könnyen* $3^k \geq 2^{30}$*, azaz* $k \geq 19$*-re már azt mondanám, hogy cinkelt.*

23. Mi a valószínűsége, hogy 0,1,2,3,4,5 találatom lesz a LOTTÓ-n?

Megoldás: Hipergeometrikus: $P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$,

24. Mi a valószínűsége, hogy 11,12,13,13+1 találatom lesz a TOTÓ-n ha felteszem hogy minden választ 1/3 valószínűséggel tudok?

Megoldás: Binomiális: $P(X = k) = \binom{14}{k} (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{14-k}$,

25. Valaki egy LOTTÓ szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűdége legalább 1/2 legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)

Megoldás: 23. feladatban már kiszámoltuk, P(X=k)=p értékét. Ekkor komplementermódszerrel annak a valószínűsége, hogy k hét alatt nyerünk: $1-(1-p)^k \geq \frac{1}{2}$ *és egyenlőtlenségből kiszámolhatók az egyes k-k.*