

Matematika B4

IV. gyakorlat

2005. szeptember 4., 5.

1. Bevezető kérdések

1. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?
 - a) Hányszor állt le a szalag az n -edik termékig (őt is beleértve)?
 - b) Hány terméket gyártott a gép az n -edik leállásig?
 - c) Hányadikra jön a következő leállás?
 - d) Hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)
2.
 - a) Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?
 - b) És ha két kockával dobunk, egy pirossal és egy kézzel, mennyi az összeg várható értéke?
 - c) És a két dobott szám különbségének várható értéke (piros kockával dobott számból kivonjuk a kék kockával dobott számot)?
 - d) És a két dobott szám eltéréseinek várható értéke (nagyobbik számból kivonjuk a kisebbet)?
3. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le 10%. Változatlan forgalmi viszonyokat feltételezve, mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben.

2. Poisson eloszlás

Ha a X egy valószínűségi változó az $x_k = k$ ($k=0,1,2,\dots$) értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük.

Feladatok:

4. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tüzeset van? (Számoljuk ki az eddig tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás képletével is!)
5. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.
6. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.

7. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?
8. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van? És annak, hogy az első 6 oldalon nincs egy sem?

3. Várható érték

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i \quad , \text{ feltéve ha } \sum_i |x_i| p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i \quad , \text{ feltéve ha } \sum_i |t(x_i)| p_i < \infty$$

Feladatok:

9. A diszkrét X eloszlás tagjai: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x=1,2,3,4$). Mennyi az eloszlás várható értéke?
10. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?
11. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék hosszú távon?
12. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob akkor újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára hosszú távon?
13. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvénnel fogadva, nyereségünk várható értéke?
14. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?
 - a) Feltéve hogy az utolsó dobást is beleszámítjuk?
 - b) Feltéve hogy az utolsó dobást nem számítjuk bele?
15. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?
16. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk az első pirosig, és jelöljük X -szel a húzások számát. Számoljuk ki: X , X^2 , 2^X , $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!

4. Házi feladatok

17. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.
 - a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
 - b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?

- c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?
18. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k ötalálatos szelvény lesz?
 19. A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullancsokkal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.
 20. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Adjon becslést (lehetőleg élel) annak a valószínűségére, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt.
 21. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobna. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzüsszegben állapotodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?
 22. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő: $x_k = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ és $p_k = \frac{1}{2^k}$. Igazolja, hogy nincs várható értéke!
 23. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X -szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a.) Adjuk meg a X valószínűségi változó eloszlását. b.) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét.
 24. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p , illetve $q (=1-p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?
 25. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.
 - a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?
 - b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?
 26. Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-t vagy 2-t dob ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli 6-t dob ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszerre dobna nyerőt, nem fizetnek, hanem előlről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyeresi és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?
 27. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!
 28. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevéssel húzzunk az első pirosig, és jelöljük X -szel a húzások számát. Számoljuk ki: X , X^2 , 2^X , $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!
 29. * Mennyi a lottón a találatok számának várható értéke?