pl. $\begin{pmatrix} t & z \\ \bar{z} & s \end{pmatrix}$ 2x2-es önadjungált mátrix, ahol $t, s \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

$$x_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1 - i \cdot x_2 \\ x_1 + i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

Pauli-mátrixok

V_1, V_2 vektorterek

Def: $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés

φ lineáris, ha $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot \varphi(f) + \mu \cdot \varphi(g)$, ahol $f, g \in V_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Ha $V_2 = \mathbb{C}$, akkor φ lineáris funkcionál.

pl. a) $Tr : M_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$ Tr: mátrixhoz a nyomát rendeli – ez egy lin. funkcionál

$$Tr \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

b) $I : C_{\mathbb{R}}[0,1] \to \mathbb{R}$

$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ ez egy lin funkcionál

c) $\partial : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ deriválás lin. leképezés

$L(V_1, V_2) = \{ V_1 \to V_2 \text{ lin. leképezések} \}$

$(c\varphi)(f) = c \cdot \varphi(f)$

$(\varphi_1 + \varphi_2)(f) = \varphi_1(f) + \varphi_2(f)$

Def: $L(V, \mathbb{C}) = V^*$ algebrai duálisa V-nek

pl. $Tr \in M_n(\mathbb{C})^*$

a)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ahol $y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot x_j$

$\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}$

b) $\varphi : V_1 \to V_2$ lin. leképezés

$e_1, \ldots, e_n \in V_1$ bázis V_1-ben

$f_1, \ldots, f_m \in V_2$ bázis V_2-ben

$\varphi(e_i) = \lambda_{1i} f_1 + \lambda_{2i} f_2 + \cdots + \lambda_{mi} f_m$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$ ← ez a lin. leképezés mátrixa