

Például:

$$\begin{pmatrix} t & z \\ \bar{z} & s \end{pmatrix}$$

$2 \times 2$ -es önadjungált mátrix, ahol  $t, s \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ .

$$\underbrace{x_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Pauli-mátrixok}} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i \cdot x_2 \\ x_1 + i \cdot x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

$V_1, V_2$  vektorterek

**1. Definíció.**  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  leképezés.  $\varphi$  lineáris, ha  $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot \varphi(f) + \mu \cdot \varphi(g)$ , ahol  $f, g \in V_1, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Ha  $V_2 = \mathbb{C}$ , akkor  $\varphi$  lineáris funkcionál.

például:

a)  $\text{Tr}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\text{Tr}$ : mátrixhoz a nyomát rendeli – ez egy lineáris funkcionál.

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

b)  $I: C_{\mathbb{R}}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$I(f) = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{ez egy lineáris funkcionál}$$

c)  $\sigma: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$  deriválás is lineáris leképezés

$$\begin{aligned} L(V_1, V_2) &= \{V_1 \rightarrow V_2 \text{ lineáris leképezések} \} \\ (c\varphi)(f) &= c \cdot \varphi(f) \\ (\varphi_1 + \varphi_2)(f) &= \varphi_1(f) + \varphi_2(f) \end{aligned}$$

**2. Definíció.**  $L(V, \mathbb{C}) = V^*$  algebrai duálisa  $V$ -nek

például:

a)  $\text{Tr} \in M_n(\mathbb{C})^*$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ahol

$$\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } y_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot x_j \quad (\underline{\mathbf{x}} \rightarrow A\underline{\mathbf{x}})$$

b)  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  lineáris leképezés,  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in V_1$  bázis  $V_1$ -ben,  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \in V_2$  bázis  $V_2$ -ben.

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_{1i}\mathbf{f}_1 + \lambda_{2i}\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_{mi}\mathbf{f}_m$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{ez a lineáris leképezés mátrixa}$$