Parkettázó és spektrális halmazok vizsgálata Fourier analízissel

Móra Péter, III. évfolyam
Konzulens: Matolcsi Máté, Analízis Tanszék

2005. október 25.

1. Parkettázó és spektrális halmazok

1.1. Bevezető

A dolgozatomban parkettázó és spektrális halmazokkal fogok foglalkozni. A parkettázó halmazok osztálya természetes módon merül fel a matematika számos területén, számelméletben [7], geometriában [12], Fourier-analízisben [11]. A parkettázás definíciója elég természetes: azok a halmazok parkettáznak, amelyeknek elcsúsztatott (de el nem forgatott) példányaival a „tér” egyrétűen lefedhető (nullmértékű hézagoktól eltekintve). Bár a fogalom kézenfekvő, számos kérdés merül fel parkettázással kapcsolatban, amelyeket egyáltalán nem olyan egyszerű megválaszolni, sőt több alapvető probléma máig nyitott. (Ilyen például a periódikus parkettázási sejtés [9] és a Hajós-féle kváziperiodicitási sejtés [8], amelyekre azonban nem fogunk bővebben kitérni.)

A spektrális halmazok osztályát eredetileg Euklideszi terekben vezette be Fuglede a ’70-es években. A fogalom I. E. Segal 1957-es kérdésével kapcsolatban merült fel, nevezetesen, hogy milyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ esetén lehet a $-i\frac{\partial}{\partial x_j}$ parciális deriválás operátorokat $C_c^\infty(\Omega)$-ról egymással felcserélhető $L_2(\Omega)$-beli nem korlátos önadjungált operátorokká kiterjeszteni. Fuglede [1] azt látta be, hogy minden spetrális Ω-nak megvan ez a tulajdonsága. A spektralistás definíciója azonban, amint azt később látni fogjuk, nem túl intuitív, így Fuglede eredménye kapcsán kézenfekvő a kérdés, hogyan tudjuk „ránézésre” eldönteni, hogy egy adott Ω sketrális-e. Fuglede azt a sejtést fogalmazta meg, hogy Ω pontosan akkor spektrális, ha parkettáz. Noha a sejtés számos speciális esetben igaznak bizonyult, a közelmúltban a sejtés mindkét irányát sikerült ellenpéldákkal megcáfolni. [2], [4]

A dolgozatot a következőképpen építem fel:

Az első fejezetben bevezetem a szükséges fogalmakat, megemlítek néhány korábbi eredményt az irodalomból, és vázolok néhány egyszerűbb tételt, amelyekre később szükségem lesz. A második fejezetben áttekintem részletek nélkül Tao, valamint Kolountzakis és Matolcsi ellenpélda konstrukcióit. A harmadik fejezetben rátérek a saját eredményekre. Megcáfolom Lagarias és Szabó egy az univerzális spektrum létezésére vonatkozó sejtését, valamint leírom, hogy Matolcsi és Farkas ötletei nyomán milyen keresési feladat vezetett a Fuglede sejtés 3 dimenziós ellenpéldájához. Megjegyzem, hogy a Fuglede sejtés 1, 2 dimenzióban továbbra is nyitott.

A dolgozatban a parkettázó és spektrális halmazok tulajdonságainak vizsgálatára és a Mihail N. Kolountzakis és Matolcsi Máté által kidolgozott módszer elemzésére elsősorban kombinatórikai és Fourier-analízisbeli eszközöket használok, míg a konkrét példák megtalálásánál számítógépes programokat hívok segítségül. Mivel a felmerülő kérdések többségére nem ismert gyors algoritmus, a programozási feladatok megoldása távolról sem triviális. Végül a negyedik fejezetben említést teszek azokról a numerikus kísérletekről is, amelyeket 1-dimenzióban végeztem a Fuglede sejtéssel kapcsolatban.

1.2. Definíciók, jelölések

Bevezetek néhány jelölést, amiket a dolgozatomban használni fogok. Ha S egy halmaz egy térben, akkor S^c-vel jelölöm a komplementerét. Általában $A + B$-n a következő halmazt értem: $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, és értelemszerűen $S - S = \{s_1 - s_2 \mid s_1, s_2 \in S\}$. $(1, 2, 3, 4)^T$-tal az adott vektor transzponáltját jelölöm (azaz oszlopvektort). Ezt általában azért használom, mert oszlopvektorként több helyet foglal. Előfordul, hogy egy tételnél nem a legáltalánosabb alakját mondom ki, csak annyit, amennyit később felhasználok. Ha egy X tér egy halmazának parkettázási, illetve spektrális tulajdonságát vizsgáljuk, és nem írom ki, hogy melyik térben, akkor értelemszerűen arra az X térre gondolok, amelyet a halmaz definíciójánál említettem. A csoport műveleten általában az összeadást értem, ami természetesen kommutatív. Egy H halmaz esetén $|H|$ a H halmaz elemszámát vagy mértékét fogja jelölni (aszerint, hogy diszkrét térben, vagy Euklideszi térben vagyunk). $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ fogja jelölni az n-edrendű ciklukus csoportot. Véges G csoport dimenzióján azt a legkisebb d számot értem, amelyre G faktorcsoportja $\mathbb{Z}^d$-nek.

A parkettázó és spektrális halmazok osztályát először $\mathbb{R}^d$-ben definiáljuk, hiszen Fuglede sejtése eredetileg $\mathbb{R}^d$-beli halmazokra vonatkozott.

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ korlátos nyílt halmaz* parkettáz, *ha le lehet fedni $\mathbb{R}^d$-t Ω eltoltjaival egyrétűen nullmétrékű hézagoktól eltekintve. Ekkor T-t Ω egy komplemensének nevezzük, ha T az a halmaz, amely elemeivel eltoljuk Ω-t, azaz $\cup_{t \in T} t + \Omega = \mathbb{R}^d \setminus N$, ahol tehát diszjunkt unióról van szó, és N nullmértékű halmaz.*

Megjegyezzük, hogy T általában nem egyértelmű, hiszen lehetséges, hogy Ω-val többféleképpen is parkettázhatunk.

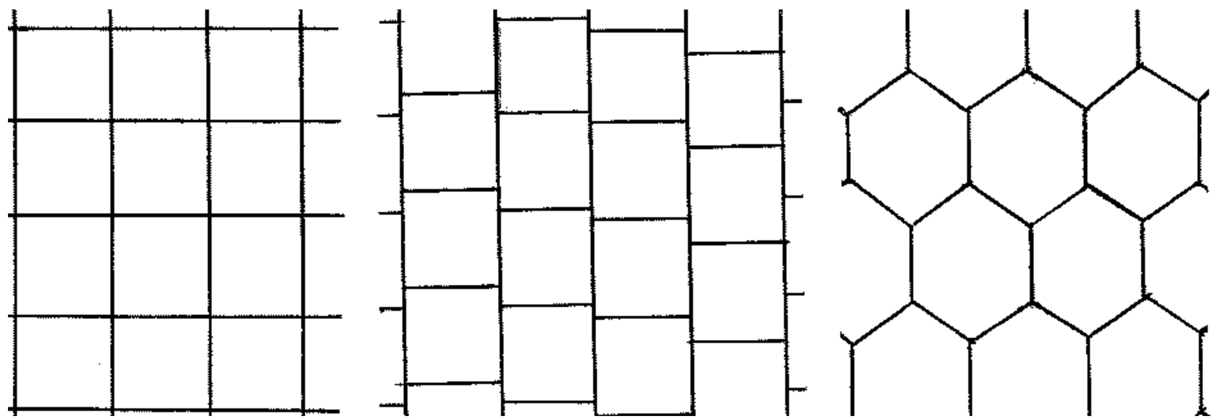
2. Definíció. *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy Ω* spektrális, *ha létezik Λ részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek úgy, hogy az $\left\{ \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} \Big|_{\mathbf{x} \in \Omega} \right\}_{\xi \in \Lambda}$ halmaz elemei egy ortonormált bázisát alkotják $L^2(\Omega)$-nak. Ekkor Λ-t Ω* spektrumának *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy Ω-nak akár sok különböző spektruma is lehet, így Λ nem egyértelmű.

A fenti definíciókat lehetne általánosítani nyílt halmazok helyett pozitív, véges mértékű halmazokra is, a tér pedig általános esetben lehet lokálisan kompakt Ábel-csoport is. A dolgozatomban azonban csak a $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$, és véges Ábel csoportok fognak szerepelni. Bár a definíciókban szerepel, hogy lehet nullmértékű hézag, egyik tételben sem ez lesz a hangsúlyos pont.

Példák:

1. $\Omega = (0,1)$ parkettázza $\mathbb{R}$-et, például $\mathbb{Z}$ komplemensel. Mivel egy függvény Fourier sora $L^2((0,1))$-ben konvergens, ezért $\mathbb{Z}$ spektruma is Ω-nak.
2. Legyen Ω az egységnégyzet $\mathbb{R}^2$-ben. Az előzőekhez hasonlóan Ω parkettázza $\mathbb{R}^2$-et, és spektrális is. Választhatjuk $\mathbb{Z}^2$-t parkettázó komplemensnek és spektrumnak is.
3. $\mathbb{R}^2$ parkettázásaira példák:



1. ábra.

B. Fuglede [1] 1974-ben azt a sejtést fogalmazta meg, hogy egy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ akkor és csakis akkor parkettáz, ha spektrális (természetesen mindkét tulajdonságát $\mathbb{R}^n$-ben tekintjük). A sejtés látszólag két távoli fogalmat köt össze.

Parkettázások egy fontos osztálya a rácsszerű parkettázások.

3. Definíció. *Egy $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ halmazt rácsnak nevezünk, ha $\Sigma = A \cdot \mathbb{Z}^d$, ahol A egy teljes rangú lineáris transzformáció.*

Látni fogjuk, hogy vannak olyan halmazok, amelyek parkettáznak ugyan, de semmiképpen sem rácsszerűen.

Most rátérünk a parkettázás és spektralitás definíciójára $\mathbb{Z}^d$-ben, illetve véges Ábel csoportokon.

4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy véges $A \subseteq \mathbb{Z}^d$* parkettáz, *ha le lehet fedni $\mathbb{Z}^d$-t A eltoltjaival egyrétűen. Ekkor B-t A komplemensének nevezzük, ha B az a halmaz, amely elemeivel eltoljuk A-t, azaz $\mathbb{Z}^d$ minden eleme egyértelműen áll elő egy A-beli és egy B-beli elem összegeként. Ezt jelölésben $A \oplus B = \mathbb{Z}^d$-nel fejezzük ki. Ugyanígy lehet definiálni a parkettázó tulajdonságot tetszőleges G véges Ábel csoport esetén is.*

5. Definíció. *Legyen G véges Ábel csoport vagy $G = \mathbb{Z}^d$. Azt mondjuk, hogy egy véges $A \subset G$ halmaz spektrális G-ben, ha létezik a G feletti csoportkaraktereknek olyan halmaza, amelyeket A-ra megszorítva $L^2(A)$ (véges dimenziós) tér ortogonális bázisát kapjuk. Azaz létezik $S = \{\gamma_1, \ldots \gamma_r\} \subset \hat{G}$, amelyre $\{\gamma_1|_A \ldots \gamma_r|_A\}$ az $L_2(A)$ tér ortogonális bázisa.*

Speciálisan ha $G = \mathbb{Z}_n^d$, akkor G elemeit d hosszú mod n oszlopvektorokkal, $\hat{G}$ elemeit pedig mod n sorvektorokkal azonosítjuk, és $\gamma \in \hat{G}$ és $x \in G$ esetén $\gamma(x) = e^{2\pi i/n\langle\gamma,\mathbf{x}\rangle}$ (ahol a skalár szorzás mod n is vehető).

6. Definíció. *$A \subset G$ esetén Z_A fogja jelölni az A halmaz χ_A indikátorfüggvényének Fourier transzformációjának zéró halmazát, azaz $Z_A = \{\gamma \in \hat{G} : \hat{\chi}_A(\gamma) = 0\}$. Speciálisan a $\mathbb{Z}_n^d$ csoport tetszőleges A részhalmazának a Fourier zéróhalmaza (a továbbiakban csak zéróhalmaz) $Z_A \subseteq \hat{\mathbb{Z}}_n^d$, ahol $\mathbf{k} \in Z_A$ pontosan akkor, ha $\sum_{\mathbf{x}\in A} e^{2\pi i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle/n} = 0$.*

7. Definíció. *Egy nxn-es mátrixot Hadamard mátrixnak nevezünk, ha elemei ± 1-ek és bármely két sora ortogonális egymásra. Ez a definíció általánosítható komplex esetre is: nxn-es H komplex értékű mátrixot Hadamard mátrixnak nevezzük, ha H minden eleme egységnyi abszolút értékű, és $HH^* = nI$ (ahol I jelöli az egységmátrixot).*

8. Definíció. *Egy nxn-es H mátrixot log-Hadamard mátrixnak nevezünk, ha valós értékű, és $(e^{2\pi i h_{i,j}})_{i,j=1}^n$ egy Hadamard mátrix (ahol $h_{i,j}$ jelöli H i. sorának j. elemét).*

1.3. A sejtéssel kapcsolatos korábbi eredmények

Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül felsorolom az irodalomban szereplő eddig elért főbb eredményeket.

1. Fuglede [1] bebizonyította, hogy a sejtése igaz, ha a spektrum vagy a komplemens egyike rács. Pontosan: Ω akkor és csak akkor parkettáz egy $\Sigma = A\mathbb{Z}^d$ ráccsal, ha Ω-nak spektruma $\Sigma^* = (A^{-1})^T\mathbb{Z}_d$.

2. Egy T halmaz pontosan akkor spektruma egy egység kockának, ha az egység kocka parkettázza $\mathbb{R}^n$-et a T halmazzal. Ezt majdnem egyszerre bizonyította be Iosevich-Pedersen, Lagarias-Reeds-Wang, és Kolountzakis (1998). (A két és három dimenziós eseteket Jorgensen és Pedersen korábban belátták.)

3. Venkov [12] 1954-ben és P. McMullen [13] 1980-ban megmutatták, hogy ha Ω konvex és parkettázza $\mathbb{R}^n$-et, akkor ez egy szimmetrikus politóp, és van rácsos parkettázása. Fuglede tételéből következik, hogy Ω spektrális.

4. Ha Ω parkettázza $\mathbb{R}^+$ félegyeneset, akkor spektrális (Pedersen-Wang 1998).

5. A sejtés mindkét irányban igaz, ha Ω két intervallum uniója $\mathbb{R}$-ben (Laba 2000).

Az eddig felsorolt eredmények mindegyike egy speciális esetben igazolta, hogy a sejtés igaz. Ezekkel a dolgozatomban nem fogok foglalkozni. A teljesen általános eset azonban mindkét irányban nyitott volt egészen 2003-ig.

6 Terence Tao [2] 2003-ban mutatott egy 5 dimenziós halmazt (véges sok egységkocka unióját), amely spektrális volt, de nem parkettázott. Később Terence Tao konstrukcióján javítva Mihail N. Kolountzakis és Matolcsi Máté [3] hasonló tulajdonságú halmazt tudtak adni 3 dimenzióban.

7 A sejtés másik irányát szintén Mihail N. Kolountzakis és Matolcsi Máté tudta megcáfolni 2004-ben: olyan 5 dimenziós halmazt konstruáltak, amely parkettáz, de nem spektrális [4]. A módszerükkel később Farkas Bálint és Révész Szilárd 4 dimenziós ellenpéldát talált. Jelenleg ismert 3 dimenziós ellenpélda is, ennek a megtalálásában vettem részt Farkas Bálinttal és Matolcsi Mátéval [6].

1.4. Felhasznált tételek

Az alábbiakban felsorolok néhány tételt, amelyeket használni fogok.

1. Tétel. *Egy G véges csoportnak A részhalmaza pontosan akkor paktettázza G csoportot B komplemenssel, ha $|A|\,|B| = |G|$ és $(A - A) \cap (B - B) = 0$.*

A tételt nem bizonyítom. Mindkét iránya egyszerű.

2. Tétel. *Egy G véges csoportnak A részhalmaza pontosan akkor parkettázza G csoportot B komplemenssel, ha $|A|\,|B| = |G|$, és $Z_A \cup Z_B = \hat{G} \setminus \{0\}$.*

Bizonyítás. $A + B = G \Leftrightarrow \chi_A * \chi_B = \chi_G$, ahol $*$-gal a konvolúciót jelölöm, χ-vel pedig az indikátor függvényt. Fourier transzformálva az egyenlet mindkét oldalát: $\chi_A * \chi_B = \chi_G \Leftrightarrow \hat{\chi_A} \cdot \hat{\chi_B} = \hat{\chi_G}$. Vegyük észre, hogy a $\hat{\chi_G}$ függvényt pontosan ismerjük:

$$\hat{\chi_G} = \begin{cases} |G| & \text{ha } x = 0 \\ 0 & \forall x \in \hat{G}, x \neq 0 \end{cases}$$

Azaz a kapott egyenlet ekvivalens azzal, hogy a $\hat{\chi_A} \cdot \hat{\chi_B}$ legalább egyik tagja mindig 0, ha $x \in \hat{G}$ és $x \neq 0$, illetve $x = 0$ esetben az értéke $|G|$. Ezek a feltételek pont azt mondják ki, hogy $Z_A \cup Z_B = \hat{G} \setminus \{0\}$ és $|A|\,|B| = |G|$.

3. Tétel. *Egy véges G csoport T részhalmazának pontosan akkor spektruma $S \subseteq \hat{G}$ halmaz, ha $S - S \subseteq Z_T \cap \{0\}$ és $|S| = |T|$.*

Bizonyítás. A bizonyítás elég egyszerű. $\left\{\frac{1}{|T|^{1/2}} e^{2\pi i \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle}\right\}_{s \in S}$ normáltsága mindig fennáll, és pontosan akkor lesz ortogonális, ha $\forall s_1, s_2$ különböző S-beli elemekre fennáll, hogy

$$\sum_{x \in T} \frac{1}{|T|^{1/2}} e^{2\pi i \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{x} \rangle} \frac{1}{|T|^{1/2}} e^{-2\pi i \langle \mathbf{s}_2, \mathbf{x} \rangle} = 0$$

Ez ekvivalens azzal, hogy $S - S \subseteq Z_T \cup \{0\}$. Ezen tulajdonságú S esetén pontosan akkor lesz $\left\{\frac{1}{|T|^{1/2}} e^{2\pi i \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle}\right\}_{s \in S}$ bázis is $L^2(T)$-n, ha $|S| = |T|$ (a dimenzió miatt).

4. Tétel (Szegedy[9]). *Legyen G egy véges csoport, $T \subseteq G$. Ha létezik egy $\varphi : G \to H$ homomorfizmus úgy, hogy φ injektív T-n és $\varphi(T)$ parkettázza H-t T' komplemenssel, akkor T is parkettázza G-t $\varphi^{-1}(T')$ komplemenssel.*

A tételt nem bizonyítom, egyszerűen adódik.

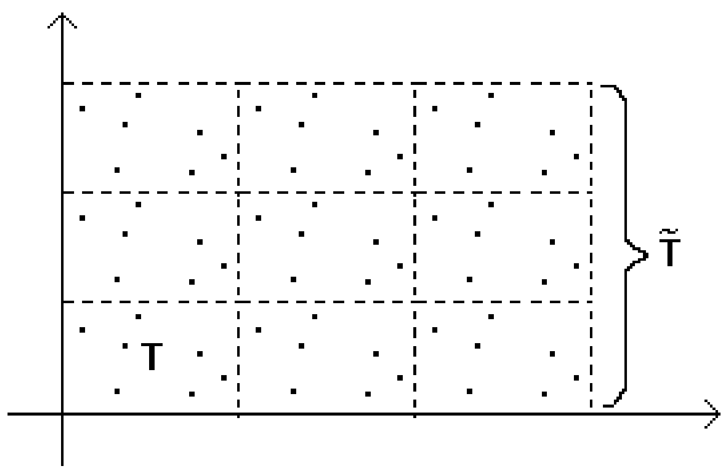
5. Tétel. *Legyen H mátrix olyan $k \times k$-es log-Hadamard mátrix, amelynek minden eleme $1/n$ többszöröse. Ha $LT = nH$ mod n, ahol L $k \times d$, T $d \times k$ alakú egészértékű mátrixok, akkor T mátrix oszlopvektorainak halmazának, mint Z_n^d-beli elemeknek, az L mátrix sorvektorainak halamaza spektruma.*

Bizonyítás. Jelöljük az egyszerűség kedvéért T'-vel T mátrix oszlopvektorainak halmazát, L'-vel L sorvektorainak halmazát. Tekintsük a $\left\{ \frac{1}{|T'|^{1/2}} e^{2\pi i/n \langle \mathbf{l}, \mathbf{t} \rangle} \right\}_{\mathbf{l} \in L'}$ halmazt, ahol $\mathbf{t} \in T$. Ezek az elemek a H halmaz log-Hadamard volta miatt ortonormáltak, k db van belőlük, azaz $L^2(T)$-nek egy ortonormált bázisát adják.

2. Tao, Matolcsi és Kolountzakis eredményei

6. Tétel (Tao[2]). *Ha egy d dimenziós véges csoportban létezik olyan halmaz, amely spektrális, de nem parkettáz, akkor létezik hasonló tulajdonságú halmaz $\mathbb{Z}^d$-ben és $\mathbb{R}^d$-ben is.*

Csak a bizonyítás ötletét írom le. Jelölje T a szóban forgó halmazt, G a d dimenziós véges csoportot. G $\mathbb{Z}^d$-nek faktorcsoportja, tehát úgy gondolhatunk rá, mint egy d dimenziós diszkrét „téglára”. Ebben a téglában tekintjük T reprezentánsait. Ezután tekintünk egy óriási, de véges mértű „ládát” (lásd 2. ábra) és telepakoljuk téglával, és minden téglában tekintjük T reprezentánsait. Ezzel a módszerrel T-t sokszorosítottuk, és a kapott halmazt $\tilde{T}$-mal jelöljük. Belátható, hogy ha T spektrális G-ben, akkor $\tilde{T}$ hullám is spektrális $\mathbb{Z}^d$-ben, valamit ha T nem parkettázza G-t, akkor megfelelő számú sokszorosítás után $\tilde{T}$ sem parkettázza $\mathbb{Z}^d$-t. Ezután a $\tilde{T}$-beli rácspontokra d dimenziósbeli egységkockákat illesztve olyan Ω halmazt kapunk, ami spektrális $\mathbb{R}^d$-ben, de nem parkettázza azt.



2. ábra.

Az első fejezet definícióinak és tételeinek, valamint a fenti tételnek köszönhetően minden a kezünkben van, hogy készítsünk egy ellepéldát Fuglede sejtésének azon irányára, miszerint minden spektrális halmaz parkettáz. Az ellenpéldát véges csoportban keressük. Itt egy log-Hadamard mátrix faktorizációja lehetőséget ad egy olyan halmaz megtalálására, amelynek ismert a spektruma. Ha erről a halmazról valamilyen meggondolás alapján be tudnánk látni, hogy nem parkettáz, akkor Tao fenti tételét (6) felhasználva készen lennénk az $\mathbb{R}^d$ ellenpéldával. Megjegyezzük, hogy ha egy d dimenzióra találunk ellenpéldát, akkor az könnyen maga után vonja, hogy d-nél nagyobb dimenzióban is léteznek ellepéldák.

7. Tétel (Tao [2], Matolcsi [5]). $d \geq 4$ *egészre létezik egységkockáknak véges uniójaként előálló olyan* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *halmaz, amely spektrális, de nem parkettáz.*

Bizonyítás. Terence Tao a cikkjében először 6×6-os H log-Hadamard mátrixot mutat, és konstruál belőle egy 6 dimenziós ellepéldát, majd különböző módszerekkel ezt alakítja át egy 5 dimenziós halmazzá. A mátrix rangja 4 mod 3, így nem az eredeti 6 dimenziós példát adom meg, hanem Matolcsi Máté faktorizációs ötletét felhasználva egyből az 4 dimenziós ellenpéldára térek (Tao sokkal technikaiasabban jutott el az 5 dimenziós halmazig, ezért nem részletezem). A Terence Tao által talált log-Hadamard mátrix a következő:

$$H = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy lehetséges felbontása a következő: $3H = LT$ mod 3

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Az 5. tétel miatt T mátrix oszlopvektorainak halmazának, mint Z_3^4-beli elemeknek, az L mátrix sorvektorainak halamaza spektruma. A kérdés már csak az, hogy T mátrix oszlopvektorai parkettázzák-e $\mathbb{Z}_3^4$-t? $\mathbb{Z}_3^4$ elemszáma 3^4, míg T mátrixnak 6 oszlopvektora van. Így oszthatósági okokból nem parkettázhat. A 6. tétel értelmében T oszlopvektoraiból képezhető ellenpélda $\mathbb{R}^4$-ben a Fuglede sejtés azon irányára, miszerint minden spektrális halmaz parkettáz.

Ezután egy másik log-Hadamard mátrixot felhasználva Kolountzakis és Matolcsi 3 dimenzióban is talált ellenpéldát.

8. Tétel (Matolcsi, Kolountzakis). *Létezik $\Omega \subset \mathbb{Z}_8^3$ halmaz, amely spektrális, és nem parkettáz.*

Következmény: A 6. tétel értelmében következik, hogy a sejtés ezen iránya hamis $\mathbb{R}^3$-ben is.

Eddig a Fuglede sejtés egyik irányával foglalkoztunk, és nem esett szó a másik irányról. Felmerül a kérdés, hogy minden parkettázó halmaz spektrális-e? A kérdés nyitott volt 2004-ig. Az eddig felsorolt tételekből nem következett semmi konkrétum ezzel kapcsolatban, azonban látva, hogy a sejtés egyik iránya nem igaz, érdemes volt megvizsgálni a másik irányt is.

A sejtés másik irányának megcáfolásához szükségünk lesz egy új definícióra. Ezt a definíciót Jeffrey C. Lagarias és Y. Wang vezette be [11] cikkjükben.

9. Definíció. *Egy G véges csoport Ω részhalmazára azt mondjuk, hogy létezik $\Lambda \subset \hat{G}$ univerzális spektruma, ha Λ spektruma Ω minden komplemensének.*

Megjegyezzük, hogy az elnevezés kicsit félrevezető, hiszen egy Λ univerzális spektrum valójában Ω komplemenseinek spektruma, nem magának Ω-nak.

Legyen $\Omega \subset G$ parkettázó részhalmaz. A parkettázó komplemensei legyenek $T_1, T_2, T_3, ...T_k$. Ha létezik Ω-nak univerzális spektruma az pontosan azt jelenti, hogy $T_1, T_2, T_3, \dots T_k$ halmazok mindegyike nemcsak spektrális (azaz igaz mindegyikre a Fuglede sejtés ezen iránya), hanem még az a feltétel is teljesül, hogy létezik egy közös spektumuk (erre utal az univerzális szó). Lagarias és Wang azt a sejtést fogalmazták meg, hogy minden parkettázó halmaznak van univerzális spektruma. A fentiek értelmében ez erősebb, mint Fuglede sejtés azon iránya, miszerint minden parkettázó halmaz spektrális is. Itt arról van szó, hogy egy parkettázó halmaz nem csak spektrális, hanem tetszőleges komplemensének van univerzális spektruma, azaz tetszőleges komplemensének összes komplemense (amibe a kiindulási halmazunk természetesen beletartozik) rendelkezik egy közös spektrummal.

9. Tétel (Lagarias, Szabó). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{Z}_n^d$ halmaz. Ha létezik $S \subset \hat{\mathbb{Z}_n^d}$, hogy $|S| = \frac{|\mathbb{Z}_n^d|}{|\Omega|}$, és $S - S \subset \hat{\mathbb{Z}_n^d} \setminus Z_\Omega$, akkor Ω-nak létezik univerzális spektruma.*

Bizonyítás: Felhasználva a 2. és a 3. tételt az állítás elég egyszerű. Legyen Ω adott a fentiek szerint, és $T_1, T_2, \dots T_k$ a parkettázó komplemensei. A 3. tétel szerint elég lenne belátni a tételben lévő S halmazról, hogy $S - S \subset Z_{T_i} \cup \{0\}$ teljesül $i = 1, 2, \dots k$-ra. Ez pedig nyilván teljesül, hiszen a tétel feltételei szerint $S - S \subset \hat{\mathbb{Z}_n^d} \setminus Z_\Omega$, és mivel Ω-nak T_i-k parkettázó komplemensei, ezért a 2. tétel szerint $Z_\Omega \cup Z_{T_i} = \hat{\mathbb{Z}_n^d} \setminus \{0\}$ igaz $i = 1, 2, \dots k$-ra. Így $S - S$ biztosan $\bigcap_{i=1}^k Z_{T_i} \cup \{0\}$-ben van.

Jeffrey C. Lagarias és Szabó Sándor a tételük bizonyítása mellett [10] cikkükben felvetették, hogy a fenti feltétel nemcsak elégséges, de szükséges is. Ezt egy $\mathbb{Z}_6^4$-beli halmazzal sikerült megcáfolnom. A számolásokat és a bizonyítást a 3. fejezetben fogom taglalni.

Megjegyzés: A tétel feltételeiből az is következik, hogy S *univerzális komplemense* Ω-nek, azaz Ω minden spektrumának az S halmaz komplemense. A bizonyítását nem írom le, hasonló könnyedséggel adódik, mint az előbbi bizonyítás.

Most rátérünk olyan parkettázó halmaz konstrukciójára, amely nem spektrális. Fuglede ezen irányára először Matolcsi Máté és Mihail N. Kolountzakis talált ellenpéldát, amit [4] cikkükben publikáltak. Először visszavetjük a problémát véges csoportokra Tao módszeréhez analóg módon. Megjegyezzük, hogy noha a két konstrukció azonos, a bizonyítás teljesen más ötleteket igényel.

10. Tétel (Matolcsi, Kolountzakis). *Ha* $\Omega \subset \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_d}$ *parkettázó halmaz, amely nem spektrális, akkor* Ω *sokszorosításával előállítható* $\tilde{\Omega}$ *halmaz parkettáz, de nem spektrális* $\mathbb{Z}^d$*-ben. Továbbá, ha* B *parkettáz, de nem spektrális* $\mathbb{Z}^d$*-ben, akkor* $B + (0,1)^d$ *parkettáz, de nem spektrális* $\mathbb{R}^d$*-ben.*

Véges csoportokat vizsgálva pedig a következőkre jutottak:

11. Tétel (Matolcsi, Kolountzakis). *Létezik* $\Omega \subset \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_6^5$ *halmaz, amely parkettáz, de nincs spektruma.*

A bizonyításnak csak az alapötletét írom le. Találtak egy $\Omega \subset \mathbb{Z}_6^5$ parkettázó halmazt, amelyre nem teljesült a 9. tétel feltétele, azaz nem rendelkezett olyan $S \subset \hat{\mathbb{Z}}_n^d$ halmazzal, hogy $|S| = \frac{|\mathbb{Z}_n^d|}{|\Omega|}$, és $S - S \subset \hat{\mathbb{Z}}_n^d \setminus Z_\Omega$ teljesülne. Ebből még nem következik, hogy Ω-nak nincs univerzális spektruma, hiszen $T_1, T_2, T_3 \ldots T_k$-val jelölve Ω komplemenseit akár létezhetne egy olyan $g \in G$ elem, amelyre $g \in \bigcap_{i=1}^k Z_{T_i}$ és $g \in Z_\Omega$ is teljesül. Matolcsi Máténak és M. Kolountzakisnak sikerült megmutatniuk minden $g \in Z_\Omega$ nem nulla elemre külön- külön, hogy létezik T komplemense Ω-nak, hogy az adott $g \notin Z_T$-nek. Így $\bigcap_{i=1}^k Z_{T_i} \cup \{0\}$ szükségképpen megegyezik $\hat{\mathbb{Z}}_6^5 \setminus Z_\Omega$-val. Innen már következik, hogy Ω-nak nincs univerzális spektruma $\mathbb{Z}_6^5$-ben. A megfelelő komplemensek felhasználásával konstruáltak egy halmazt $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_6^5$-ben, amely parkettázott, de nem volt spektrális. Ez egy 6 dimenziós ellepélda, de $\mathbb{Z}_{15}$-öt kicserélve $\mathbb{Z}_{17}$-re $\mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_6^5$-ben kaptak ellenpéldát. Ez a csoport faktorcsoportja $\mathbb{Z}^5$-nek, így 5 dimenziós. (A lényeg annyi volt, hogy 17 relatív prím 6-hoz, így nem növelte meg a dimenziószámot.)

Következmény: Ez a halmaz a 10. tétel értelmében ellenpéldához vezet Fuglede sejtésének azon irányára, hogy minden parketázó halmaz spektrális 5 dimenzióban.

Az egyik legfrissebb általam ismert eredmény Matolcsi Máténak és Farkas Bálintnak a következő tétele. A tétel értelmében az előző tétel bizonyításában felhasznált konstrukció (amelyben parkettázó, de nem spektrális halmazt konstruáltak olyan parkettázó halmazból, amelynek nem volt univerzális spektruma) nem véletlenül sikerült egy konkrét példára.

12. Tétel (Matolcsi, Farkas). *Minden* d *dimenzióra igaz, hogy pontosan akkor van minden* d *dimenziós véges csoportban minden parkettázó halmaznak univerzális spektruma, ha minden* d *dimenziós véges csoportban minden parkettázó halmaz spektrális.*

A tétel bizonyítása a közös cikkünkben [6] található.

3. Saját eredmények

3.1. Lagarias és Szabó tételének feltétele elégséges, de nem szükséges

2004 októberében már ismert volt, hogy nem minden parkettázó halmaznak létezik univerzális spektruma. Volt ellenpélda 5 dimenzióban, de alacsonyabb dimenziókban nyitott volt. Arra sem volt még ismert a válasz, hogy Jeffrey C. Lagarias és Szabó Sándor [10] feltevése igaz-e, azaz pontosan akkor van univerzális spektruma $\Omega \subset \mathbb{Z}_n^d$-nek, ha létezik $S \subset \hat{\mathbb{Z}}_n^d$, hogy $|S| = \frac{|\mathbb{Z}_n^d|}{|\Omega|}$ és $S - S \subset \mathbb{Z}_\Omega^c$.

Októberben egy analízis szeminárium keretében Matolcsi Máté mutatott egy 4 dimenziós H halmazt, amely parkettázta $\mathbb{Z}_6^4$-t, de nem létezett hozzá a fenti tulajdonságokkal rendelkező S halmaz. A kérdés az volt, hogy van-e ennek a halmaznak univerzális spektruma. A sejtésünk az volt, hogy nincs, és H egy 4 dimenziós ellenpéldához vezetett volna Fuglede sejtésére. Észrevettem azonban, hogy az az eset is érdekes, ha létezik univerzális spektrum: akkor ugyanis H példát szolgáltat arra, hogy Lagarias és Szabó elégséges feltétele a 9. tételben nem feltétlenül szükséges. A válasz tehát mindenképp érdekes volt. A kérdést végülis sikerült eldöntenem és megmutattam, hogy H-nak létezik univerzális spektruma. (Megjegyzem, hogy más halmazokat használva később mégis sikerült Fuglede sejtésére 4, majd 3 dimenziós ellenpéldákat adni, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk.) A csoport $\mathbb{Z}_6^4$ volt, a halmaz pedig a következő elemekből állt:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Az egyszerűség kedvéért jelöljük $T_1, T_2, \ldots T_k$-val H halmaz különböző komplemenseit. A következőkben megmutatom, hogy ez a halmaz ellenpélda Jeffrey C. Lagarias és Szabó Sándor feltevésére. Ehhez a következő pontokat kell megmutatnom:

1. A H halmaz parkettáz. Az univerzális spektrum létezésének kérdése csak így értelmes.
2. Nem létezik $S \subset \hat{\mathbb{Z}}_6^4$ halmaz, hogy $|S| = \frac{|\mathbb{Z}_6^4|}{|H|} = 6^3$ és $S - S \subset \hat{\mathbb{Z}}_6^4 \setminus Z_H$ teljesülne.
3. A H halmaz univerzális spektrumának létezése leszűkíthető a $(2,2,4,4)$ vektor és a koordinátáinak permutációiból kapott vektorok vizsgálatára, nevezetesen, hogy ezek elemei-e $\cap Z_{T_i}$-nek.
4. $(2,2,4,4)$ (és a koordinátáinak permutációiból kapott vektorok) eleme $\cap Z_{T_i}$-nek.

A H halmaz parkettázási tulajdonságának bizonyításához a 4. (Szegedy) tételt fogom felhasználni. Ennek értelmében elég találnom egy $\varphi : Z_6^4 \to Z_6$ homomorfizmust úgy, hogy φ injektív legyen H-n és $\varphi(H)$ parkettázza Z_6-t. Ez a φ homomorfizmus legyen például $\varphi(\mathbf{x}) := \langle (1,2,3,5)^T, \mathbf{x} \rangle$. Ez könnyen ellenőrizhető, hogy H-t a $\{0,1,2,3,4,5\}$ halmazra képzi. Ennek értelmében H parkettázza Z_6^4-t Ker_φ komplemenssel. A későbbiekben mutatni fogok egy ábrát, amelyről leolvasható H egy másik komplemense.

A H halmazról láttuk, hogy parkettázza $\mathbb{Z}_6^4$-t. A 9. tétel után tett megjegyzés szerint ha létezne a fenti tulajdonságokkal rendelkező S halmaz, akkor S parkettázná $\hat{\mathbb{Z}}_6^4$-et H minden spektrumával. Megmutatom azonban, hogy létezik olyan L halmaz, amely spektruma H-nak, de nem parkettázza $\hat{\mathbb{Z}}_6^4$-t. ($\hat{\mathbb{Z}}_6^4$ elemeit sorvektorokkal reprezentáljuk.)

$$L = \{(0,0,0,0), (0,2,2,4), (2,0,4,4), (2,4,0,2), (4,4,2,0), (4,2,4,2)\}$$

Az L halmaz H spektruma. Ezt nem fogom bizonyítani. Ehhez csak annyit kell belátni, hogy $L - L \subset Z_H \cup \{0\}$ teljesül. Ez akár kézzel, akár számítógéppel könnyen ellenőrizhető. Vegyük észre, hogy L minden vektorának minden koordinátája páros. $\mathbb{Z}_6^4$-ben a páros csupa páros koordinátájú vektorok 3^4 elemszámú részcsoportot alkotnak. L ennek a részcsoportnak részhalmaza, tehát ha L parkettázná $\mathbb{Z}_6^4$-t, akkor speciálisan parkettázná ezt a részcsoportot is, ezt könnyű belátni. Ez azonban nem lehet, mert L elemszáma nem osztja 3^4-ent. Ebből következik, hogy H nem rendelkezik a fenti tulajdonságú S halmazzal.

A 3. pont belátásához megadunk egy jelöltet H univerzális spektrumára. U jó lesz univerzális spektrumnak, ahol

$$U := \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \quad | \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \text{ mod } 6\ \}$$

$|U| = 6^3 = 216$, ugyanis u_1, u_2, u_3 vektort tetszőlegesen megválasztva u_4 determinálva lesz. Vegyük észre, hogy $U - U = U$, hiszen U részcsoport. Pontosan akkor lesz tehát U univerzális spektruma H-nak, ha $U - U = U \subset \cap_{T_i} \cup \{0\}$. Bontsuk fel U-t $U_0 = U \cap Z_H$ és $U_1 = U \cap Z_H^c$ diszjunkt unióra. $U_1 \subset Z_{T_i} \cup \{0\}$ minden T_i parkettázó komplensére H-nak, ugyanis a 2. tétel szerint $Z_H \cup Z_{T_i} = G \setminus \{0\}$ minden i-re. Mik lesznek U_0 elemei? Pontosan azok, amelyek elemei U-nak, és a következő összeg 0-val egyenlő:

$$\sum_{\mathbf{h} \in H} e^{2\pi i \langle \mathbf{u}, \mathbf{h} \rangle / 6} = 1 + e^{2\pi i u_1/6} + e^{2\pi i u_2/6} + e^{2\pi i u_3/6} + e^{2\pi i u_4/6} + 1$$

A fenti egyenlőségben csak H elemeivel való skaláris szorzást végeztem el. Könnyen meggondolható, hogy a fenti összeg kétféleképpen lehet 0. Ennek az alapja az, hogy az összeg az ismeretleneket nem tekintve 2, és 4 db hatodik egységvektort hozzáadva vissza kell jutnunk a 0-ba. Az első lehetőség: van két (-1)-es tag, például $u_1 = u_2 = 3$, és van kéttő, amelyek összege 0 (ilyenkor az előző jelölést követve u_3 = $u_4 + 3$). Ebben az esetben nem lesz az elemek összege osztható 6-tal, vagyis nem U-beli elemet kapunk. A másik eset az, amikor u_1, u_2, u_3, u_4 a $2, 2, 4, 4$ számok valamilyen permutációja. A tagokat megfelelően csoportosítva pont azt kapjuk, hogy egy szabályos háromszög mentén mozgunk a komplex síkon, melynek utolsó lépéseként ismét 0-ba jutunk. Tehát U_0 a $(2, 2, 4, 4)$ vektor permutációjából áll. Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy U univerzális spektruma H-nak elég belátni, hogy $(2, 2, 4, 4) \in Z_{T_i}$ minden T_i komplemens esetén. (H szimmmetrikus volta miatt a permutációkra is igaz lesz ez a tulajdonság.)

A következőkben felvázolok egy algoritmust, amellyel ki tudtam listáztatni H összes komplemensét. Tudván az összes komplemenst számítógéppel tudtam ellenőrizni, hogy a $(2, 2, 4, 4) \in \cap Z_{T_i}$ teljesül-e. Ezt követően generáltam géppel egy bizonyítást, amely viszonylag rövid, és papíron ellenőrizhetővé teszi a fenti állítást.

3.2. Szemléletes parkettázás

H halmazhoz adok egy konkrét $T \subset \mathbb{Z}_6^4$ parkettázó komplemensét. Lássuk be, hogy ennek már a leírása is sok helyet venne igénybe, hiszen minden parkettázó komplemens $\|T\| = 6^4/6 = 216$ elemű. Ezért készítettem egy 4 dimenziós ábrát, és azon próbálom meg szemléltetni. Noha a továbbiakban a bizonyításban ez a szemléletes parkettázás nem fog szerepet játszani, azért látom fontosnak mégis megmutatni, mert a munkám során nagyban segítette a halmazok elképzelését az, hogy le tudtam rajzolni.

A T halmaz, amit mutatni fogok előáll $T = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ alakban, ahol:

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$K_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$K_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

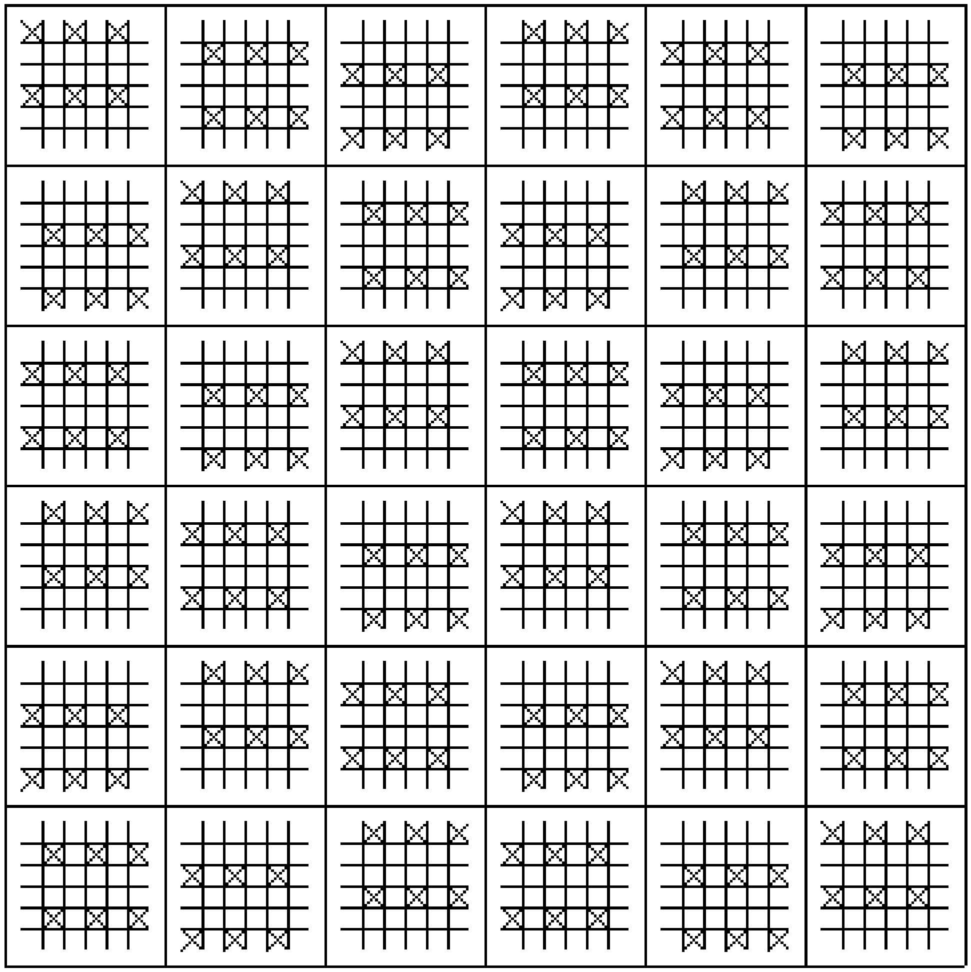
A 3. ábrán 4 dimenzióban ábrázolom az elemeket. A lap 2 dimenziós, ezért egy kis trükköt kell bevetnünk. Ez egy alapjában véve egy 6×6-os nagy négyzetekből álló rács, ahol minden egyes nagy négyzet tartalmaz egy 6×6-os kis négyzetekből álló rácsot. A T halmazt a 3. ábra reprezentálja, ahol pontosan azon a pozíción van egy x jel berajzolva, ahol (x sorának indexe a nagy rács szerint, x oszlopának indexe a nagy rács szerint, x sorának indexe a körülötte lévő kis rácsban, x oszlopának indexe a körülötte lévő kis rácsban)$^T \in T$. A számozást mindegyik dimenzióban 0-tól indítjuk.

Nézzünk egy konkrét példát. A 4. ábrán besatíroztam az egyik elemet. Ennek az elemnek a koodinátái az előbbi felírásban $(1, 0, 2, 5)^T$. Ez eleme T-nek, hiszen K_1-ből a $(0, 0, 0, 4)^T$ vektort, K_4-ből az $(1, 0, 2, 1)^T$ vektort, a K_2-ből és K_3-ből a nullvektort választva épp előáll $(1, 0, 2, 5)^T$. Ha H elemeit hozzáadjuk ehhez a vektorhoz, akkor pont a besatírozott elemet, és a kis köröknek megfelelő elemeket kapjuk. Szemléletesen: ha ezen a rajzon mindegyik x-hez H elemeit hozzáadnánk, akkor mindenhol kis kör vagy satírozott rész állna, és egyszeresen fednénk le mindent, azaz minden kockához pontosan egyszer nyúlnánk. A másik szemléletes jelentése az ábrának a periódikussága. A későbbiekben részletezett bizonyításnál kulcsfontosságú szerephez jut az, hogy minden ilyen parkettázáshoz vannak vektorok, amely mentén eltolva az elemeket ugyanazt a halmazt kapjuk. Ezekre a tulajdonáságokra ilyen ábrákat nézve jöttem rá. A $T = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ is könnyen ellenőrizhető. Például minden elemre igaz, hogy két kis oszloppal jobbra is van elem, és négy kis oszloppal jobbra is van elem. Ez jelképezi K_1 szerepét az összegben.

3.3. Számítógépes esetvizsgálat

A problémát számítógépes programmal oldottam meg. Szimmetriai okok miatt elég $(2, 2, 4, 4)$-gyel foglalkozni. A H-nak egy tetszőleges T komplemensére géppel könnyen ellenőrizni lehet, hogy teljesül-e $(2, 2, 4, 4) \in Z_T$, azaz $\sum_{\mathbf{t} \in T} e^{2\pi i \frac{(2,2,4,4)\cdot \mathbf{t}}{6}} = 0$ fennáll-e. Mindegyik kézzel papíron talált T halmazra ez a tulajdonság fennállt, a kérdés az volt, hogy igaz-e ez az összes komplemensre.

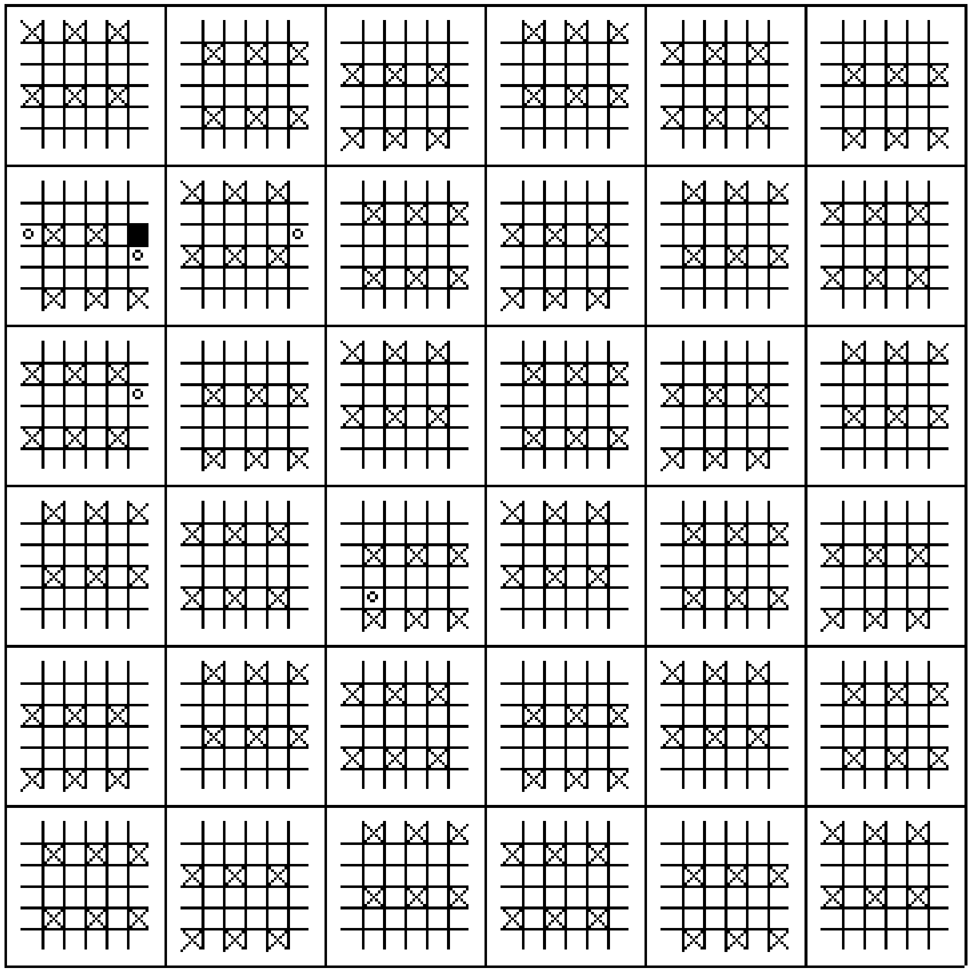
A probléma nem volt egyszerű. Parkettázó komplemens keresésére nem ismerünk polinom idejű algoritmust. Ha egy egyszerű brute-force módszerrel (azaz végigpróbáljuk az összes lehetőséget) próbáljuk meg kilistázni az összes szóba jöhető T-t, akkor az $\binom{1296}{216} \approx 1.17 \cdot 10^{252}$ esetet ad.



3. ábra.

A H halmaz valamilyen speciális tuldonságát ki kellett használnom, különben emberi időn belül nem futott volna le a feladat. Először is vegyük észre, hogy a csupa 0 elem feltehetően eleme T-nek. Logikus, hogy a program nem mehet végig az összes eseten, a futás során le kell vágni azokat a futási ágait, amelyen valamilyen megfontolás miatt biztosan nem találunk megoldást.

Első megközelítésben írtam egy egyszerű brute force algoritmust. A program lényege az volt, hogy kezdetben üres T halmazzal indult, és sorban haladt az 1296 elemen. Ha egy $\mathbf{x}$ elemre igaz volt, hogy hozzávéve az eddig meglévő T elemhez nem kerülünk folytathatatlan helyzetbe, azaz $H+T$ nem fed le egyetlen elemet sem kétszer, akkor $\mathbf{x}$-et hozzávettem az eddigi T-hez. Ha egy elemet már legalább kétszer lefedünk $H+T$-vel, akkor a továbbiakban T-hez új elemet véve ez nem fog megjavulni, ezért az algoritmus minden lehetőségen végigmegy. Ezt a módszert addig folytatom, amíg tudom. Egy idő után az algoritmus végigér az elemeken. Ekkor megfogom az utolsónak T-be vett elemet, jelöljök ezt $\mathbf{y}$-nal. Kiveszem $\mathbf{y}$-t a T halmazból, és $\mathbf{y}$ utáni elemek között kezdtem el keresni azon elemeket, amelyeket megint bevehetek T-be. A módszer biztosan megtalálja az összes komplemenst. A futási eredménye: egyet sem talált, az elemek többsége rögzített volt, és pár óra alatt csak az utolsó 10-20 elemet pakolgatta csak odébb.



4. ábra.

Logikus volt, hogy valamilyen tulajdonságot ki kell használni, csak azt nem tudtam milyet. Magáról a H halmazról első ránézésre semmilyen speciális nem látszódik. (Emlékezzünk csak a hexagonos példára! Annál a halmaznál nyilvánvaló volt, hogy csak 1 féleképpen lehet lepakolni.) Mindenképpen találnom kellett olyan megfontolásokat, amelyek bizonyos esetekben garantálják, hogy egy konkrét T halmazt már nem lehet folyatni. Ezt kétféleképpen tehettem volna meg:

1. nézem, hogy milyen halmazok jöhetnek szóba, és papíron próbálok különböző eseteket végigszámolni. Itt lehet, hogy rájöttem volna bizonyos szabályosságokra.

2. azt az elvet próbálom meg leprogramozni, hogy maga a program keressen megfelelő indokokat, amik garantálják, hogy egy T halmaznak nincs folytatása.

Én ez utóbbi mellett döntöttem. Vegyük észre, hogy nem igazán lehet tudni, hogy egy- egy már leprogramozott algoritmus milyen hatékony lehet, de az eredményeket remekül össze lehet hasonlítani. Mivel brute-force módon végigmegyek az összes lehetőségen alfabetikus sorrenben, ezért vizsgálható, hogy az egyes módszerek mikor lépnek át egy előre rögzített halmazt. Így gyorsabbnak tudtam mondani két algoritmus közül az egyiket már akkor is, ha még egyik sem talált konkrét parkettázó komplemenst. Olyan 6-7. átírás, finomítás után elfogadható futási idejű algoritmust kaptam. Röviden leírom a program vázát. Az egyes konstansokat próbálgatással kísérleteztem ki. Az alábbi felsorolás nem a futási sorrendet jelöli, a pontok az elkülönítés miatt vannak.

1. Ha 25 elemet hozzávettünk T-hez az utolsó viszgálat óta, akkor álljunk meg, és kezdjük el vizsgálni a konkrét halmazt ellentmondások után keresve.

2. Ellentmondás keresése a következőképpen történik. Egy $\mathbf{x}$ elemet 6 helyről lehet lefedni, pontosan az $\mathbf{x} - H$ halmazból. Keressük meg azon $\mathbf{x}$ elemeket, amelyeket már csak 1 féleképpen lehet lefedni, azaz $\mathbf{x} - H$ halmazból 5 hely már olyan, hogy lefedne olyan elemeket is, amelyeket már lefedtünk (azaz olyan, hogy biztosan nem lehetne hozzávenni T-hez). Ha találunk egy olyan elemet, amelyet csak 1 féleképpen lehet lefedni, akkor nyugodtan hozzávehetjük „gondolatban” T-hez, hiszen ha létezik T-nek olyan folytatása, amelyik H-nak egy parkettázó komplemense lesz, akkor az ezt a szóban forgó elemet mindenképp tartalmaznia kell.

3. Ismételjük a 2. lépést addig, amíg találunk ilyen 1 féleképpen lefedhető elemet. Többször is érdemes végigmenni a táblán, hiszen ha veszünk T-hez „gondolatban” új elemeket, akkor lehet, hogy újra találunk csak 1 helyről lefedhető elemet.

4. Mennjünk végig az 1296 elemen újra, és azon elemeket, amelyeket pontosan két helyről lehet lefedni, azokat fedjük le először az első helyről, majd a másodikról. Mindkét esetben keressünk újabb csak 1 helyről lefedhető elemeket, és azt az egyféle lefedésüket „gondolatban” vegyük hozzá T-hez. (Fontos, hogy ilyenkor már ne foglalkozzunk a két helyről lefedhető elemekkel, ugyanis a tapasztalataim szerint az ismét sokat ront a futási időn.) Ha a két eset közül egyik sem fut le ellentmondás nélkül, akkor biztosan nem lehet folytatni az adott T-t.

5. Bármikor találunk olyan elemet, amelyet még nem fedtünk le, de nem is lehet lefedni sehonnan, akkor ellentmondáshoz jutottunk.

6. A vizsgálat végén állítsuk vissza az eredeti T halmazt, vagyis azt, amihez gondolatban vettünk plusz elemeket.

7. Amíg ellentmondással végződik a vizsgálat, addig mindig vegyük el az utoljára T-hez vett elemet, és indítsuk újra a vizsgálatot. Ha a vizsgálat valamikor nem végződik ellentmondással, akkor folytassuk a brute-force eljárást az első pontot figyelembe véve.

A programban természetesen ahol csak lehetett kerültem a drága műveleteket (pl. osztás), és felesleges memóriacímzéseket, helyettük sok helyen bitműveletekre támaszkodtam. A módszer biztosan lehetne jobb is, de lefut, úgyhogy a célnak megfelel: a program a Pentium 2,4 GHz-es gépemen másfél óra alatt végzett. Csak azt a feltételt feltéve, hogy a csupa 0-ból álló vektor eleme a T halmaznak (az eltolásinvariancia miatt ez egy természetes feltétel) kaptam 288 lehetséges komplemenst. Az eredmény: H-nak létezik univerzális spektruma, ugyanis minden T komplemensre teljesül, hogy $\sum_{\mathbf{t}\in T} e^{2\pi i \frac{(2,2,4,4)\cdot \mathbf{t}}{6}} = 0$.

3.4. Számítógéppel generált bizonyítás

A matematikusok körében a 4-szín sejtés bizonyítása óta vitatott téma, hogy a számítógéppel végzett bizonyítás mennyire nevezhető bizonyításnak. Abban azért egyetértenek, hogy a számítógéppel bizonyított állítás igaz, de a „bizonyítás” jelzőt már néhányan vonakodnak rá kimondani. Általában fenn áll az a veszély, mint ahogyan az én esetemben is, hogy hibás a program, és bár valamit nagyon számol, de nem igazán azt, amit mi szeretnénk. Éppen ezen okok miatt elkezdtem papíron is vizsgálni a problémát. Lényeges előnyöm volt: tudtam, hogy melyik irányt kell bizonyítani, továbbá bárminemű ötletem támadt a H komplemenseit illetően, pillanatok alatt tudtam ellenőrizni az összes halmazon. Így amikor a halmazok szabályosságait vizsgáltam, és 2-3 halmazon teljesült valamilyen feltétel, akkor egy rövid program segítségével megnéztem mindegyik halmazon.

A lehetséges T komplemens halmazokat tanulmányozva feltünt, hogy bizonyos komplemens halmazok periódikusak, sőt több periódusuk is van. Periódikusság alatt azt értem, hogy adva van egy $\mathbf{x}$ elem, hogy minden $\mathbf{t} \in T$-re $\mathbf{t} + \mathbf{x} \in T$ is teljesül (és természetesen $\mathbf{t} - \mathbf{x} \in T$, hiszen minden elem rendje véges, konkrétan 6 osztója). Ha visszaemlékezünk, amikor H parkettázási tulajdonságát bizonyítottam, a komplemens előállt $K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ alakban, ahol

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ennek a halmaznak például a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ és a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ biztosan periódusa.

A következő észrevételt számítógéppel tettem: minden halmaz periódikus a most felsorolt elemek mindegyikével, vagy azok valamelyik permutációjával: (az egyszerűség kedvéért csak a 6 rendű elemeket írom le)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A vizsgált tulajdonság, azaz $\sum_{\mathbf{t} \in T} e^{2\pi i \frac{(2,2,4,4)\cdot \mathbf{t}}{6}} = 0$ azt jelenti, hogy $\sum_{\mathbf{t} \in T} \omega^{(1,1,2,2)\cdot \mathbf{t}} = 0$ ahol az $\omega = e^{2\pi i/3}$, azaz a harmadik egységgyök. A $\mathbf{t} \in T$ elemeket 3 részre bonthatjuk aszerint, hogy $(1,1,2,2) \cdot \mathbf{t}$ melyik maradékosztályban van moduló 3. Vegyük észre, hogy csak ez számít, vagyis az, hogy $\omega^{(1,1,2,2)\cdot \mathbf{t}}$ melyikkel egyenlő az alábbiak közül: $\omega, \omega^2, 1$. Éppen ezért elég megmutatnunk, hogy csak az számít, hogy az $\mathbf{t} \in T$ közül $(1,1,2,2) \cdot \mathbf{t}$ moduló 3 vett maradékosztályok mindegyikében pontosan ugyanannyi elem helyezkedjen el. Vegyük észre, hogy ha a $(3,4,4,4)^T$ vektor elemeit tetszőlegesen megpermutáljuk, és skalárisan szorozzuk $(1,1,2,2)$-vel, akkor moduló 3 vagy 1-et vagy 2-t kapunk. Ha be tudnánk bizonyítani, hogy minden T_i halmaznak a $(3,4,4,4)^T$ vagy valamelyik permutációja periódusa, akkor azzal készen lennénk. Az indoklás egyszerű: minden egyes $\mathbf{t} \in T$ eleme lenne egy 6-os ciklusnak, amely ciklus mentén a, b, c, a, b, c

alakban pontosan 2 db elem lenne a skaláris szorzás után minden egyes mellékosztályban mod 3. Jelölje P a $(3,4,4,4)^T$ vektor permutációjaként előálló vektorok halmazát, azaz:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

A fenti feltevésnél (miszerint minden parkettázó komplemenshez létezik egy P-beli elem, amely periódusa) kevesebbet fogok belátni, de amit bizonyítok, az a célnak megfelel. Azt fogom megmutatni, hogy

1. ha $\mathbf{t} \in T$, akkor létezik $\mathbf{x} \in P$, hogy $\mathbf{t} + \mathbf{x} \in T$ is teljesül.

2. ha $\mathbf{x} \in P$ és $\mathbf{t}, \mathbf{t} + \mathbf{x} \in T$, akkor $\mathbf{t} + 2\mathbf{x} \in T$ is teljesül.

3. ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ és $\mathbf{t}, \mathbf{t} + \mathbf{x}, \mathbf{t} + \mathbf{y} \in T$, akkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ szükségszerűen megegyeznek.

Ezeket elég lesz belátni, ugyanis az első pontból következik, hogy minden $\mathbf{t} \in T$-re t után a periódus valahogy elindul. A második pont szerint ez után egyértelműen folytatódik. Ez a „lánc” 6. eleménél fog visszatérni $\mathbf{t}$-be. Tehát minden $\mathbf{t} \in T$ eleme lesz egy ilyen 6-os láncnak. A harmadik pont fogja garantálni, hogy minden $\mathbf{t} \in T$ pontosan 1 db 6 hosszú lánc tagja legyen. Mivel minden lánc mentén teljesül az az állítás, hogy $(1,1,2,2) \cdot \mathbf{t} \bmod 3$ eredményei közül pontosan 2 lesz mindegyik mellékosztályban, ezért a $(2,2,4,4)$ eleme lesz T zéróhalmazának.

Az első pont bizonyítása egyszerű. Eltolásinvariancia miatt feltehető, hogy $\mathbf{t} = (0,0,0,0)^T$. A parkettázás során a H halmazzal le kell fednünk egyszeresen az összes elemet, így a $(4,4,4,4)^T$-t is. Kell lennie egy elemnek H komplemensében, amelyhez H valamelyik elemét hozzáadva pontosan $(4,4,4,4)^T$-t kapjuk. Melyik lehet ez? Csak a következő elemek valamelyike:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a felsorolásból az első és az utolsó vektor nem jöhet számításba. Az első vektor lefedi a $(0,0,0,0)^T$ elemet, és igaz, hogy $\mathbf{t} = (0,0,0,0)^T$, és $(0,0,0,0)^T \in H$, azaz azt az elemet már lefedtük. Hasonló meggondolással zárható ki az utolsó vektor: ha $(2,2,2,2)^T$-t belevennénk H komplemensébe, akkor a $(2,2,2,2)^T$-t már másodjára fednénk le. A maradék vektorok valamelyikét kell választanunk, tehát beláttuk az első pontot.

A második pont bizonyítása a legnehezebb (legtechnikásabb) lépés. Papíron nem is nagyon láttam esélyesnek megoldani, viszont volt már egy programom. A szimmetria és eltolásinvariancia miatt feltehető, hogy $\mathbf{t} = (0,0,0,0)^T$, és $\mathbf{x} = (3,4,4,4)^T$, azaz bizonyítandó, hogy $(0,0,0,0)^T$, $(3,4,4,4)^T \in T$-ből következik, hogy $(0,2,2,2)^T \in T$ (ez a $(3,4,4,4)^T$ vektor kétszerese). A programomat a következő helyzettel indítottam: $(0,0,0,0)^T, (3,4,4,4)^T \in T$ teljesül, de tegyük fel indirekt, hogy $(0,2,2,2)^T \notin T$. Az eredmény: egy tizedmásodpercen belül kiírta, hogy a megadott feltételek mellett nem létezik H-nak ilyen komplemense. A kérdés csak az volt, hogy eközben a gép pár esetet nézett-e végig, amelyek papíron is ellenőrizhetőek, vagy több milliót. Szerencsére kiderült, hogy csak oldalnyi esetről van szó. Újabb programozás után sikerült az esetek számát kicsit csökkentenem, továbbá szimmetria miatt megharmadolni a bizonyítást. A következőekben felsorolt esetek számítógéppel generáltak. Mindenhol felteszem, hogy $(0,0,0,0)^T, (3,4,4,4)^T \in T$ és $(0,2,2,2)^T \notin T$ teljesül. Minden elemet egyrétűen kell lefednünk. Amikor azt a T-beli elemet keressük, amellyel egy konkrét x elemet le akarunk fedni, akkor értelemszerűen 6 elem jöhet számításba. Ezek az elemek pontosan az $\{x\} - H$ halmaz elemei.

A bizonyítás:

$(1,2,2,2)^T$-t le kell fedni. Pontosan 3 féleképpen lehet: 1., 2., 3. esettel.

1. $(1,2,2,2)^T$-t lehet le lehet fedni $(1,1,2,2)^T$ felhasználásával.
   $(0,0,0,5)^T$-t le kell fedni. Pontosan 3 féleképpen lehet: 1a), 1b), 1c) esettel.

   a) $(0,0,0,5)^T$-t lehet le lehet fedni $(0,5,0,5)^T$ felhasználásával.
   Az alábbiakat egymás után kell belátni, azok egymásból következnek:
   $(0,0,5,0)^T$-t csak $(0,0,4,0)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(2,1,1,2)^T$-t csak $(2,0,1,2)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(2,2,1,2)^T$-t csak $(2,2,1,1)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(4,4,3,4)^T$-t csak $(4,3,3,4)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(1,5,5,0)^T$-t csak $(1,5,5,0)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(0,5,5,1)^T$-t csak $(5,5,5,1)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(5,0,0,1)^T$-t csak $(4,0,0,1)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(3,1,0,2)^T$-t csak $(3,1,5,2)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(2,5,4,0)^T$-t csak $(0,3,2,4)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(4,1,0,2)^T$-t le kell fedni. Ezt nem lehet, ez ellentmondás.

   b) $(0,0,0,5)^T$-t lehet le lehet fedni $(0,0,5,5)$ felhasználásával.
   Az alábbiakat egymás után kell belátni, azok egymásból következnek:
   $(0,5,0,0)^T$-t csak $(0,4,0,0)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(2,1,1,2)^T$-t csak $(2,1,0,2)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(2,2,1,2)^T$-t le kell fedni. Ezt nem lehet, ez ellentmondás.

   c) $(0,0,0,5)^T$-t lehet le lehet fedni $(0,0,0,4)$ felhasználásával.
   Az alábbiakat egymás után kell belátni, azok egymásból következnek:
   $(2,2,2,1)^T$-t csak $(2,2,1,1)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(1,2,2,1)^T$-t csak $(0,2,2,1)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(1,2,1,2)^T$-t csak $(1,2,0,2)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(4,4,4,3)^T$-t csak $(4,3,4,3)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(5,0,0,5)^T$-t csak $(5,0,5,5)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(1,3,1,1)^T$-t csak $(1,3,1,0)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(5,1,0,5)^T$-t csak $(5,1,0,5)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(5,0,1,5)^T$-t csak $(5,5,1,5)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(0,5,1,0)^T$-t csak $(4,3,5,4)^T$ felhasználásával lehet lefedni.
   $(0,0,1,5)^T$-t le kell fedni. Ezt nem lehet, ez ellentmondás.

2. $(1,2,2,2)^T$-t lehet le lehet fedni $(1,2,1,2)^T$ felhasználásával.

3. $(1,2,2,2)^T$-t lehet le lehet fedni $(1,2,2,1)^T$ felhasználásával.

A 2. és a 3. eset megegyezik az 1. esettel, hiszen az utolsó három koordinátát jogunk van tetszőlegesen permutálni a szimmetria miatt (hiszen a feltételben minden vektornál az utolsó három koordináta megegyezik).

Így beláttuk, hogy ha $\mathbf{t}$ és $\mathbf{t}+\mathbf{x} \in T$, ahol $\mathbf{x} \in P$, akkor szükségszerűen $\mathbf{t}+2\mathbf{x}$ is eleme T-nek. Most megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{t}, \mathbf{t}+\mathbf{x}, \mathbf{t}+\mathbf{y} \in T$ teljesül, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$, akkor $\mathbf{x}=\mathbf{y}$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ különböznek. A szimmetria miatt feltehető, hogy $\mathbf{x}=(3,4,4,4)^T$, $\mathbf{y}=(4,3,4,4)^T$. Ekkor a $(4,4,4,4)^T$-ot kétféleképpen is lefedtük, hiszen $(3,4,4,4)^T+(1,0,0,0)^T=(4,4,4,4)^T=(4,3,4,4)^T+(0,1,0,0,)^T$. Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{t}, \mathbf{t}+\mathbf{x}, \mathbf{t}+\mathbf{y}$ egyszerre T-beli elemek.

A fentiekkel példát mutattam arra, hogy Jeffrey C. Lagarias és Szabó Sándor tételének a megfordítása, sejtésükkel ellentétben, nem igaz, azaz nem létezik $S \subset \hat{\mathbb{Z}_6^4}$, hogy $|S|=\frac{|\mathbb{Z}_6^4|}{|H|}$, és $S-S \subset \hat{\mathbb{Z}_6^4} \setminus Z_H$, de H rendelkezik univerzális spektrummal.

3.5. Fuglede sejtés cáfolása 3 dimenzióban

Az alábbiakban mutatok egy halmazt, amely 3 dimenziós lesz, parkettáz, de nem lesz spektrális. A munkában segítettem Matolcsi Máténak és Farkas Bálintnak, de a lényeges ötletek tőlük származnak. A fejezeten belül jelölni fogom a saját eredményeimet, értelemszerűen a többi eredmény Matolcsi Máténak és Farkas Bálintnak tulajdonítható.

Az alapötlet ugyanaz lesz, mint eddig: fogunk egy log-Hadamard mátrixot, és vizsgáljuk egy felbontását. Így kapunk két halmazt: az egyik spektruma a másik lesz. Az elsőről be fogjuk látni, bár parkettáz, de nincs univerzális spektruma. A 12. tétel értelmében így Fuglede sejtésének azon iránya, miszerint minden parkettázó halmaz spektrális nem igaz 3 dimenzióban.

Legyen a K, T és $L \subset \mathbb{Z}_{24}^3$ a következő halmazok:

$$K := \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&4&2&6&6&2\\ 0&2&4&1&5&6\\ 0&6&3&4&2&7\\ 0&6&7&2&4&3\\ 0&2&6&5&1&4 \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&3&3\\ 3&0&0\\ 0&3&0\\ 0&0&3\\ 21&3&3 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 0&10&20&1&21&14\\ 0&22&3&20&2&7\\ 0&22&23&18&4&11 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy K log-Hadamard mátrix, és $24K = LT \bmod 24$ teljesül. Így L sorvektorai T oszlopvektorainak spektruma. Nem nehéz megmutatni, hogy T parkettáz. A 4. (Szegedy) tétel értelmében elegendő mutatnunk egy φ homomorfizmust $\mathbb{Z}_{24}$-re, amely T-t szürjektíven képezi le egy parkettázó halmazra. Az alábbiakban sok ilyen φ-t fogunk konstruálni.

Vegyük észre, hogy L halmaz nem parkettáz, ugyanis az elemei 3-mal oszthatóak, azaz ha L parkettázna, akkor parkettázná $\hat{\mathbb{Z}_{24}^3}$-nek egy 8^3 rendű részcsoportját is. Mivel L 6 elemű, ez nem lehetséges.

Tegyük fel, hogy T-nek létezik univerzális spektruma. Legyen $\mathbf{v}_{ij} := \mathbf{l}_i - \mathbf{l}_j$, ahol $\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j$ legyen tetszőleges sora L-nek. Ha sikerülne megmutatni, hogy minden $\mathbf{v}_{ij}$-hez létezik T-nek T'_{ij} komplemense, amelyre $\mathbf{v}_{ij} \notin Z_{T'_{ij}}$, akkor a bizonyítással készen lennénk. Ugyanis ha létezne T-nek S univerzális spektruma, akkor $S=|\mathbb{Z}_{24}^3|/|T|$ és $S-S \subset \cap_{ij} Z_{T'_{ij}} \cup 0$ teljesülne, emiatt

$S - S \cap L - L = 0$ is fennállna. Az azonban ekvivalens azzal, hogy S L-lel parkettázza $\mathbb{Z}_{24}^3$-t, ami ellentmondás (hiszen L egyáltalán nem parkettáz).

Vizsgáljuk meg $\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j$ összes leheséges kimenetelét mod 8, ahol $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j$ értékek K mátrix sorain futnak végig. Jelöljük $K - K$-val azt a mátrixot, amely sorait a fenti kivonásokkal kaptuk. Most tekintsük $K - K$-t úgy, hogy az elemeit mod 24 nézzük. Ekkor módosítani szeretnénk az elemeket $+8$ vagy $+16$ hozzáadásával úgy, hogy minden módosított sor parkettázza $\mathbb{Z}_{24}$-et, és ugyanakkor a létrejövő P mátrix rangja mod 3 legyen ≤ 3. (A későbbiekben világos lesz, hogy ez miért jó.) Ilyen P mátrix keresésével bíztak meg engem. A feladatról kiderült, hogy jól és gyorsan programozható, és Farkas Bálint és én egymástól függetlenül találtunk a fenti feltételeket kielégítő P mátrixot. A használt keresési módszereket a bizonyítás után részletezem. Most nézzük Farkas Bálint által megtalált mátrixot:

$$K - K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 16 & 2 & 4 & 12 & 14 \\ 0 & 16 & 12 & 2 & 14 & 4 \\ 0 & 16 & 12 & 14 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 14 & 12 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 2 & 12 & 1 & 13 & 14 \\ 0 & 2 & 13 & 12 & 14 & 1 \\ 0 & 2 & 14 & 13 & 1 & 12 \\ 0 & 12 & 1 & 13 & 11 & 23 \\ 0 & 12 & 2 & 22 & 14 & 10 \\ 0 & 12 & 11 & 1 & 23 & 13 \\ 0 & 12 & 13 & 23 & 1 & 11 \\ 0 & 12 & 22 & 2 & 10 & 14 \\ 0 & 12 & 23 & 11 & 13 & 1 \\ 0 & 22 & 10 & 11 & 23 & 12 \\ 0 & 22 & 11 & 12 & 10 & 23 \\ 0 & 22 & 12 & 23 & 11 & 10 \\ 0 & 22 & 23 & 10 & 12 & 11 \end{pmatrix} = P$$

A bizonyítás szempontjából P igen hasznos lesz a számunkra. Jelen esetben P mátrix rendelkezik azzal a tulajdonággal, hogy minden sora parkettázza Z_{24}-et a $C_1 = \{0, 3, 6, 9\}$ vagy a $C_2 = \{0, 1, 6, 7\}$ komplemensek valamelyikével, továbbá az $1.$, $2.$, és $4.$ sora ($\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4$) mod 3 generálja a többi sort.

Vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{v}_{ij}$ vektort. Megmutatjuk, hogy létezik hozzá megfelelő T'_{ij} komplemense T-nek. Az egyszerűség kedvéért nézzünk egy konkrét példát: legyen $\mathbf{v}_{31} = \mathbf{l}_3 - \mathbf{l}_1 = (3, 0, 0) - (0, 0, 0) = (3, 0, 0)$. Nézzük a $\mathbf{v}_{31}$-nek megfelelő $\mathbf{k}_{31}$ és $\mathbf{p}_{31}$ sorokat $K - K$-ban és P-ben (itt azokat a sorokat értem, amiket az első és harmadik sor kiszámolásakor töltöttünk fel): $\mathbf{k}_{31} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 = (0, 2, 4, 1, 5, 6)$ és $\mathbf{p}_{31} = (0, 2, 12, 1, 13, 14)$. Maga a T halmaz speciálisan lett választva: minden $\mathbf{p}_{ij}$ vektor előáll lineáris kombinációjaként mod 3. Tekintsük az $\mathbf{y}_{ij} T = \mathbf{p}_{ij}$ egyenletet mod 3. T választása olyan, hogy ez az egyenlet egyértelműen megoldható $\mathbf{y}_{ij}$-re, hiszen a megoldás egyes komponensei épp $\mathbf{p}_{ij}$ együtthatói lesznek T sorai által kifejtve. Esetünkben $\mathbf{y}_{31} = (0, 2, 0)$ mod 3. Hasonló egyenletet felírva mod 8 azt kapjuk, hogy a megoldás egyszerűen $\mathbf{v}_{ij}/3$ lesz, azaz $\mathbf{y}_{31} = (3, 0, 0)/3 = (1, 0, 0)$ mod 8 (azért, mert $\frac{1}{3} LT = 8K$ mod 8). A 8

és 3 relatív prímek, így a kínai maradéktétel szerint 1 maradékosztályt határoznak meg mod 24. $\mathbf{y}_{31} = (9, 8, 0)$ mod 24.

Minden $\mathbf{y}_{ij}$-hez rendelhetünk egy $\varphi_{ij} : \mathbb{Z}_{24}^3 \to \mathbb{Z}_{24}$ homomorfizmust a következő módon: $\varphi_{ij}(x) = \langle \mathbf{y}_{ij}, x\rangle$. Az $\mathbf{y}_{ij}$ megkonstruálása után nem meglepő, ha a T halmazt $\mathbf{p}_{ij}$-be viszi. Mindegyik $\mathbf{p}_{ij}$ parkettázza $\mathbb{Z}_{24}$-et $C_{ij} = C_1$-gyel, vagy $C_{ij} = C_2$-vel. Esetünkben $\varphi_{ij}(T) = \{0, 2, 12, 1, 13, 14\}$, ami a $C_{31} = C_1 = \{0, 3, 6, 9\}$ komplemenssel parkettázza $\mathbb{Z}_{24}$-et. A Szegedy tétel (4) minden feltétele adott, így $T'_{ij} := \varphi^{-1}(C_{ij})$ egy komplemense lesz T-nek $\mathbb{Z}_{24}^3$-ben.

Az egyetlen nyitott dolog az maradt, hogy belássuk $\mathbf{v}_{ij} \notin Z_{T'_{ij}}$. Az egész fenti konstrukció lényege, hogy ki tudjuk számolni $\hat{\chi}T'_{ij}(\mathbf{v}_{ij})$ értékét. φ_{ij} szürjektív, ez könnyen adódik. Ezért minden $\mathbb{Z}_{24}$-beli elemnek 24^2 ősképe van $\mathbb{Z}_{24}^3$-ben. Mivel $3\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{v}_{ij}$ mod 24, ezért minden $x \in T'_{ij}$-re $\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}\rangle \in 3C_{ij}$. Jelölje ρ a 8. primitív egységgyököt, ekkor:

$$\hat{\chi}T'_{ij}(\mathbf{v}_{ij}) = \sum_{x\in T'_{ij}} e^{2\pi i/24\langle \mathbf{v}_{ij}, x\rangle} = \sum_{x\in T'_{ij}} e^{2\pi i/24\langle \mathbf{3}y_{ij}, x\rangle} = \sum_{x\in T'_{ij}} e^{2\pi i/8\langle \mathbf{y}_{ij}, x\rangle} = 24^2 \sum_{k\in C_j} \rho^k \neq 0.$$

Az utolsó összeg mindig nem nulla, mert $\rho^0 + \rho^3 + \rho^6 + \rho^9 \neq 0$ és $\rho^0 + \rho^1 + \rho^6 + \rho^7 \neq 0$.

A $T \subset \mathbb{Z}_8^3$-nak nincs univerzális spektruma. Ezután a 12. és a 10. tételeket használva véges sok 3 dimenziós egységkocka olyan Ω unióját nyerjük, amely parkettázza $\mathbb{R}^3$-at, de nem spektrális.

Itt utalunk vissza arra, hogy például Ω olyan parkettázó halmaz, amelynek garantáltan nincs rácsszerű parkettázása (hiszen akkor Ω spektrális is volna).

3.6. Megfelelő P mátrix keresése

A fenti bizonyítás egyik fontos pontja, hogy egyáltalán létezik-e megfelelő tulajdonságú P mátrix, és ha igen, akkor hogyan lehet azt megtalálni. A fenti mátrixot Farkas Bálint találta; ebben a részben leírom, hogy tőle függetlenül én milyen módszerrel találtam megfelelő P mátrixokat. Ez a feladat egyszerűbb volt, mint a 3.3-ban részletezett komplemens keresés. Azon tulajdonságok, amelyekkel P-nek rendelkeznie kellett:

1. P mod 3 rangja ≤ 3.
2. $P = K - K$ mod 8 ($K - K$-n a fent definiált mátrixot értem).
3. P minden sora parkettázza $\mathbb{Z}_{24}$-et.

Az algoritmus önmagában nem érdekes, inkább az elv a fontos, hogy hogyan lehet egy ilyen problémát megközelíteni. Kellett egy támadási pont, amely kezelhetővé teszi a problémát. Például nem indulhattam neki a feladatnak úgy, hogy veszem az összes 18x6-os mátrixot, amelyek mod 3 legfeljebb 3 rangúak, hiszen ezek kilistázása nem futott volna le elfogadható belül.

Megfelelő P mátrix kereséséhez *Mathematica*-t használtam. Ez a matematikai programcsomag a sok speciális esetre kiterjedő implementációnak köszönhetően főleg numerikus módszereknél, de egyéb szimbólikus feladatoknál is, meglepően gyors tud lenni, míg a felhasználó által kézzel megírt eljárások, mint például parkettázó komplemens keresése, tapasztalataim szerint körül-belül 10-szer lassabban futnak le, mint egy kioptimalizált C kódban. Nem tudtam, hogy mennyire számításigényes a probléma, ezért reménykedve, hogy gyorsan számolható *Mathematica*-ban kezdtem dolgozni.

Először írtam egy parkettázó tulajdonságot ellenőrző eljárást. Nem törekedtem a sebességre, hiszen úgyis csak $\mathbb{Z}_{24}$-ben kellett használnom. A harmadik feltétel értelmében P minden sora parkettázza $\mathbb{Z}_{24}$-et. A második feltétel szerint minden keresendő sor csak 3^6 féle lehet, hiszen (felhasználva, hogy 8 és 3 relatív prímek) minden sor úgy áll elő, hogy $K - K$ megfelelő sorának minden eleméhez 0-t, 8-at, vagy 16-ot adunk. Bár a parkettázó algoritmusom nem volt a leggyorsabb, nem tűnt lehetetlen feladatnak $16 \cdot 3^6$-szor lefuttatni. Konstruáljuk meg $H_1, H_2, \dots H_{18}$ halmazokat. Azokat a vektorokat raktam az H_i halmazba, amelyeket $K - K$ i. sorából kaptam úgy, hogy minden elemhez hozzáadtam 0-t, 8-at, vagy 16-ot (ez összesen 3^6 lehetőség), és az is teljesült az így létrejövő vektrorra, hogy parkettázta $\mathbb{Z}_{24}$-et. Ez meglepően gyorsan, kevesebb, mint 1 perc alatt lefutott.

Vegyük észre, hogy már csak az első feltétel nem teljesült. A P mátrix még nem volt a kezemben, de volt 18 db vektorokból álló halmazom, és tudtam, hogy minden a fenti feltételeket kielégítő P úgy áll elő, hogy az i. sora az H_i halmaz egy eleme. A H_i halmazok elég kicsik voltak, pontosan 12 darab halmazban volt 6 elem, és 6 darab halmazban volt 189 elem. Mit jelent az, hogy mod 3 a mátrix rangja legfeljebb 3? Pont azt, hogy van legfeljebb 3 vektor, amely lineáris kombinációjával mod 3 minden elem előáll. Vettem 3 darab halmazt, amely csak 6 elemet tartalmazott. Pakoljunk össze egy P mátrixot. Ezen 3 darab halmazból válasszunk ki egy- egy elemet, jelöljük ezeket $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$-vel (ez 6^3 variáció). Ezek felelnek meg P megfelelő sorának. Azt tapasztaltam (ez lehet, hogy a halmazaim választásaitól függött), hogy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektorokat bárhogy választottam a 3 előre kiválasztott halmazomból mindig lineárisan függetlenek voltak mod 3. A feladat most már triviális volt: a még ki nem töltött sorokba tetszőleges elemet lehet választani az adott sorhoz tartozó H_i halmazból, amely előállt az előbb választott x, y, z elem lineáris kombinációjaként mod 3.

A fenti eljárás nem csak talál egy megfelelő P mátrixot, hanem megtalálja az összeset. Megnéztem, hogy az egyes H_i halmazokban hány olyan elem van, amely a kezdetben rögzített $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektor lineáris kombinációjaként előáll mod 3. Az összes különböző megoldások számának kiszámolásához pont ezeket az elemszámokat kell összeszorozni minden fellépő i-re, majd összeadni az összes lehetséges $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ választásra. Ez 10077696000000 lehetőség összesen, amelyből bármelyiket pillanatok alatt ki tudom számoltatni.

Megjegyzem, hogy intuitíven talán nem meglepő, hogy ha egyáltalán létezik megfelelő P mátrix, akkor nagyon sok is létezik. Az azonban vak szerencsének tűnik, hogy ilyen P egyáltalán létezik (és a bizonyítás elakadna ilyen P mátrix létezése nélkül).

4. Ellenpélda keresése 1 dimenzióban

Láttuk, hogy Fuglede sejtésének mindkét iránya hamis 3 és annál magasabb dimenziókban. Felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet 1 és 2 dimenzióban. Nem tűnt túl reményteljes feladatnak találni egy log-Hadamard mátrixot, amelynek legfeljebb 2 lenne a rangja, így másfelé kell próbálkoznunk. Ebben a fejezetben leírom hogyan próbáltam meg 1 dimenzióban ellenpéldát keresni a Fuglede sejtés egyik irányára. Eddig még nem találtam, de folytatom a keresést. Az alábbiakban összegzem az eddigi tapasztalataimat, eredményeimet. A programozás teljes részét én csináltam, de természetesen jópár ötlet származik Matolcsi Mátétól.

Az elején el kellett döntenünk, hogy mire is keressünk ellenpéldát. A választásunk a sejtés azon állításra esett, amely azt mondja ki, hogy minden 1 dimenziós parkettázó halmaz spektrális is. Ennek a választásnak algoritmikus okai voltak: könnyebbnek látszott, hogy parkettázó halmazt keressünk, és ellenőrizzük a spektrális tulajdonságait, mint fordítva. Felmerül a kérdés, hogy miért nem 2 dimenzióban próbálkoztunk. A válasz egyszerű: a feladat programozása, mint ahogy az elkövetkezőkben részletezni fogom, még 1 dimenzióban sem egyszerű, értelemszerűen 2 dimenzióban bonyolultabb lenne. Természetesen csak véges csoporttal probálkoztunk. A bizonyítás menete már ki volt dolgozva, így egy véges csoportbeli ellenpélda maga után vonta volna az $\mathbb{R}$-beli ellenpéldát is.

A kereséssel kapcsolatban felmerültek bizonyos problémák. Ezek a következők voltak:

1. Lehet, hogy a sejtés 1 dimenzióban igaz, így a programom nem találhat ellenpéldát.

2. Lehet, hogy van ellenpélda, csak a később részletezett módszerünk (amely nem foglalja magába az összes parkettázó halmazt) nem konstruál ilyen halmazt.

3. Lehet, hogy találok ellenpéldát, de az ellenpélda bizonyításához be kell látnom, hogy nem spektrális. A keresések során sok olyan halmazzal találkoztam, amelyekről nem tudtam a spektralitást belátni. Ezek akár esélyesek lehetnének ellenpéldára, de a csoport nagy elemszáma miatt ezt jelenleg nem tudom ellenőrizni.

Ez ideáig nem találtam ellenpéldát, és nem tudok semmilyen konkrét eredményt felmutatni (amely például garantálná, hogy egy bizonyos elemszámú halmazig nincs is). A programozás során előfordultak problémák, amely kezelése úgy gondolom egyáltalán nem triviális. Ezek közül egy párat ismertetek, mert úgy gondolom, hogy önmagukban is érdekesek, szépek. A leírt algoritmusok nem mindegyike jó minden esetre, de 1-2 módszer kombinálása már elég jó eredményhez szokott vezetni. A továbbiakban a konkrét futási időket nem fogok írni.

4.1. Parkettázó halmazok keresése

Az egyik általam legnehezebbnek tartott probléma az, hogy hogyan lehet $\mathbb{Z}_n$ összes k elemű parkettázó részhalmazát megkeresni. Konkretizáljuk a példát, nézzük $\mathbb{Z}_{120}$ összes 12 elemű parkettázó halmazát. Nem ismerek rá jó algoritmust. Az elején próbálkoztam véletlenszerű elemválasztásokkal, de ezek segítségével csak pár halmazt találtam. Próbáltam sorban haladni az összes lehetséges halmazon, de több, mint 10^{16} lehetőséget nem volt esélyem végignézni. Ez a módszer nagyából 10 parkettázó halmazhoz vezetett.

Kellett valamilyen konstrukció, amely segítségével parkettázó halmazokat lehet építeni. A módszer kézenfekvő volt, Matolcsi Máté több cikkjében csinált hasonlót, amikor univerzális spektrummal nem rendelkező parkettázó halmazból készített ellenpéldát Fuglede sejtésére.

13. Tétel. *Ha $A \subset \mathbb{Z}_n$ parkettázza $\mathbb{Z}_n$-et $B_1, B_2, \dots B_k$ (nem feltétlenül különböző) komplemensekkel, akkor $\cup_{i=1}^{k}(k \cdot B_i + i)$ parkettázni fogja $\mathbb{Z}_{k \cdot n}$-et.*

Bizonyítás. Megmutatom, hogy parkettáz, ehhez pedig elég megadnom a komplemensét. A komplemensének $k \cdot A$ jó lesz. Tulajdonképpen arról van szó, hogy $\mathbb{Z}_{n \cdot k}$ k-val osztható elemei által generált faktorcsoport minden tagába egy B_i képe került, így A minden elemét beszorozva k-val $\cup_{i=1}^{k}(k \cdot B_i + i)$ komplemense lesz.

A tétel segítségével rengeteg parkettázó halmazt lehet találni. Az ötlet az, hogy egy kis halmazzal kezdek, ami triviálisan parkettáz egy kis elemszámú csoportot, és a fenti tétel módszerét alkalmazva folyamatosan növelem az elemszámot. Az egyes lépések közben felcserélem a halmazok szerepét: ha A parkettázza $\mathbb{Z}_n$-et B komplemenssel úgy, hogy B-t a fenti tétel szerint pakoltuk össze, akkor most B-nek keressünk $A_1, A_2, \ldots A_i$ komplemenseit, és azokkal dolgozzunk tovább.

A módszer alkalmazása során szükségünk van egy halmaz valamennyire véletlenszerű komplemenseire. Nem jó, ha mindig ugyanazokból pakoljuk össze az újabb halmazt, hiszen akkor ugyanazt fogjuk kapni. Jelenleg $A \subset \mathbb{Z}_n$ halmaz parkettázó komplemens keresésére az 1. tétel ekvivalenciáját használom. $H = \mathbb{Z}_n \setminus (A - A) \cup \{0\}$ halmazban keresek $n/|A|$ elemszámú B részhalmazt, amelyre igaz, hogy $B - B \subseteq H$. Hasonló tulajdonságú halmazt fogunk keresni a spektrum és univerzális spektrum keresésekor, így ezt ott részletezem.

4.2. Spektrálhalmaz keresése

A megtalált parkettázó halmazoknál először spetrálhalmazt kerestem. Ahogy növekedett az elemszám ezt egyre nehezebb volt megtalálni. Egy idő után áttértem az univerzális spektralitás vizsgálatára. Tudjuk a 12. tétel értelmében minden egyes dimenzióban ha létezik parkettázó halmaz, amely nem spektrális, akkor nem igaz, hogy minden halmaznak van univerzális spektruma, és fordítva. A tétel nem ugyanarról a halmazról szól (vagyis egy teljesen más feltételt vizsgáltam egy konkrét halmazra), de az univerzális spektralitás ellenőrzése az esetek nagy részében gyorsabban lefutott.

A a 3. tétel értelmében elegendő volt megfelelő elemszámű S halmazt keresni, amelynek elemeinek különbségéből képzett halmaz része spektrálhalmaz keresésekor $Z_A \cup \{0\}$-nak, univerzális spektralitás vizsgálatánál $\mathbb{Z}_n \setminus Z_A$-nak. A feladat általánosan: keresendő S halmaz, hogy $|S|$ adott, és $S - S \subseteq T$, ahol T egy előre rögzített halmaz. (Zeróhalmazt kellő pontosságú lebegőpontos közelítéssel gyorsan tudtam számolni.)

Kis elemszám esetén a brute-force eset vizsgálat is eredményes, de nagyobb elemszámnál már túl sok variáció jöhetett számításba. Meglepő módon a véletlenszerű választás még nagyobb elemszámú csoport esetén is elég jó arányban talál ilyen S halmazt. Feltehető, hogy a 0 eleme S-nek. X elemeiből fogom S elemeit egymás után véletlenszerűen kiválasztani. Kezdetben $X = T$. Minden egyes ilyen választás után kiveszem X elemeiből azokat, amelyek már nem jöhetnek számításba: ha egy X-beli elemnek az újonnan beválasztott elemmel vett különbsége nincs T-ben, akkor eltávolítom X-ből. Ezt az eljárást ismételtem addig, amíg az X elemei elfogytak, vagy sikeres esetben S elemszáma elérte a megfelelő értéket. Ezt az eljárást nevezem „véletlenszerűnek”.

Mindig igaz volt, hogy tudtam olyan nagy halmazt előállítani, amelyre nem tudtam az univerzális spektrumának létét ellenőrizni, így ezen kellett a legtöbbet dolgozni. Ilyen halmazokhoz Matolcsi Mátéval papíron próbáltunk meg megfelelő S-t találni. Bizonyos esetekben sikerült. Ezután a papíron alkalmazott trükkök leprogramozása jött. Így egy új eljárást kaptam, amit nevezhetünk „maradékosztályosnak”. Jelenleg ott tartunk, hogy amit a véletlenszerű választáson alapuló eljárás, és ez az új eljárás sem talál meg, azt már mi sem találjuk meg papíron. Lényegében a kézzel való számítás összes trükkjénél előjön valamilyen speciális szabályosság, és ezek már bele vannak építve a maradékosztályos algoritmusba.

Legyen $T \subseteq \mathbb{Z}_n$ és $|S| = s$. Az összes előforduló feladatban $s|n$ fennáll, így ez feltehető. A maradékosztályos módszer lényege a következő:

1. Válasszuk k-t s egy osztójának.

2. Feltehető, hogy $0 \in S$. Vegyünk újabb s/k db különböző elemet $T \cap \{k, 2k, 3k, ...n-k\}$ halmazból az összes lehetséges módon, legyenek ezek $x_1, x_2, \ldots x_{n/k}$.

3. Ha létezik olyan $x_1, x_2, \ldots x_{n/k}$, hogy $0, x_1, x_2, \ldots x_{n/k}$ elemek közül bármely kettő különbsége eleme T-nek, akkor válasszunk másik k-t kiindulásként. Nem tudtunk meg semmit.

4. Ha nincs $x_1, x_2, \ldots x_{n/k}$, hogy $0, x_1, x_2, \ldots x_{n/k}$ elemek közül bármely kettő különbsége eleme T-nek, akkor igaz, hogy a feltételeket kielégítő S elemeiből pontosan s/k helyezkedik el minden mellékosztályban mod k. Az indoklás egyszerű: megpróbáltunk $s/k+1$ elemet betenni egy mellékosztályba mod k, de nem sikerült. Innen már lehet indítani egy brute-force algoritmust, amely az egyes mellékosztlyokat mod k akarja kitölteni a megfelelő módon.

A fenti algoritmust s minden osztójára érdemes elindítani, nagyság szerint csökkenő sorrenben. Az utolsó pár k értékre maga a teszt nem szokott lefutni, ezért érdemes egy időkorlátot adni a tesztelésre.

A sebességnövekedés azért jelentős, mert minden mellékosztályból külön- külön próbálunk meg kiválasztani s/k elemet, így egy nagyobb feladatot visszavezettünk sok kisebb feladatra. A lehetőségek száma drasztikusan csökken, és ráadásul ezek a mellékosztályok kitöltésekor az elemek hatnak a többi mellékoszályra is. Ha az első mellékosztályba el lehet helyezni s/k elemet d féleképpen, akkor lehet, hogy mire a második mellékosztályra kerül a sor, akkor az első mellékosztály miatt d-nél lényegesen kevesebb lehetőség marad. Az eljárás másik nagy előnye: elvileg képes belátni egy halmazról, hogy ellenpélda. Ezt a véletlenszerű választás nem tudta megtenni.

4.3. Zeróhalmaz

Vegyük észre, hogy a parkettázó halmazok nem fordulnak elő a számolásokban a megtalálásuk után. Az elején kiszámolom a zéróhalmazukat, és utána csak azokkal számolok. A keresés során ha olyan parkettázó halmazt találok, amellyel megegyező zéróhalmazú halmazt már találtam, akkor nem mentem el, mert nem hoz új lehetőséget. Tulajdonképpen csak a zeróhalmazok az érdekesek, a parkettázó halmazokat csak azért tárolom, hogy ha találok ellenpéldát, akkor tudjam bizonyítani, hogy az adott zéróhalmaz parkettázó halmazé.

A parkettázás szemléletes tulajdonság, de az, hogy valamilyen halmazból képezhető különbségek része a zéróhalmaznak, az már nem annyira. A zéróhalmazok vizsgálatánál észrevettem, hogy $A \subseteq \mathbb{Z}_n$ esetén ha $lnko(k, n) = lnko(j, n)$, akkor $k \in Z_A \iff j \in Z_A$. Ennek a bizonyítása körosztási polinomokkal történik, nem nehéz. A programozás szempontjából viszont nagyon fontos: a zéróhalmazokat elég n osztóira vizsgálni, hiszen azok determinálnak mindent.

Az alábbi táblázatban összegeztem azt, hogy milyen elemszámú csoportban, milyen méretű halmazt kerestem, mennyi parkettázó halmazt találtam (ezek zeróhalmaza különböző), és ezek közül hánynál nem találtam univerzális spektrumot.

csoport elemszáma	halmaz mérete	megtalált halmazok száma	nem találtam univ.spek.-t
120	10	67	0
300	30	71	0
600	30	199	0
900	30	440	0
8100	90	594	0
16200	90	2145	0
27000	6	310	0
27000	30	1198	4
27000	900	595	0
44100	210	640	0
88200	210	1241	0
97200	30	873	2
97200	60	2739	16
108000	60	717	2
432000	60	356	1

5. Összegzés

A dolgozatomban megpróbáltam átfogó képet adni a Fuglede sejtés jelenlegi állásáról, kiemelve az elmúlt pár év eredményét, és az ezekhez nyújtott saját hozzájárulásomat. Igyekeztem úgy összeállítani a fenti munkát, hogy mindkét irányának cáfolatára adjak egy vázlatos, ellenőrizhető bizonyítást, ahol felvonultatom a területen használt eszközöket, módszereket. A sejtés már több, mint 30 éves, és a speciális esetekben elért számos pozitív eredmény után az elmúlt két évben születtek a fent vázolt ellenpéldák.

A közeljövőben az utolsó fejezetben leírt algoritmusokat fogom tökéletesíteni, és keresek tovább ellenpéldát 1 dimenzióban. Az eddigi eredményeket nézve a dimezószám csökkenésével az előforduló ellenpéldák mind nagyobb és nagyobb rendű csoportban fordultak elő. Elképzelhetőnek tartom, hogy van 1 dimenzióban ellenpélda, csak olyan nagy elemszámú csoportban, amelyet nem tudunk papíron kézzel ellenőrizni. Ebben az esetben pedig van remény egy számítógépes bizonyításnak, esetleg a 3. fejezetben leírtakhoz hasonló papíron ellenőrizhető bizonyítás generálásának. Az 1 dimenziós eset azért is látszik különösen érdekesnek, mert egy esetleges ellenpélda megcáfolná Coven és Meyerowitz egy számelméleti sejtését is [7]. Megjegyzem, hogy a már meglévő algoritmusok, illetve adatbázis más nyitott problémák vizsgálatánál is hasznosak lehetnek majd. Ilyen például a Hajós-féle kváziperiódicitási sejtés, illetve hosszú periódusú parkettázások keresése, amelyekkel szintén tervezek foglalkozni.

Hivatkozások

[1] B. Fuglede, *Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem*, J. Functional Analysis, **16** (1974), 101–121.

[2] T. Tao, *Fuglede's conjecture is false in 5 and higher dimensions*, Math. Res. Lett., **11** (2004)(2-3), 251–258.

[3] M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi, *Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture*, in: Proceedings of the 7th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial, 2004 To appear.

[4] M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi, *Tiles with no spectra*, Forum Math., to appear.

[5] M. Matolcsi, *Fuglede's conjecture fails in dimension 4*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), no. 10,3021-3026.

[6] B. Farkas, M. Matolcsi, P. Móra, *On Fuglede's conjecture and the existence of universal spectra*, preprint.

[7] E. M. Coven, A. Meyerowitz, *Tiling the integers with translates of one finite set*, J. Algebra, **212** (1999)(1), 161–174.

[8] G. Hajós, *Sur la factorisation des groupes abéliens*, Casopis Pěst Mat. Fys. **74** (1950), 157-162.

[9] M. Szegedy, *Algorithms to tile the infinite grid with finite clusters*, in: 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 137–147, Palo Alto, CA, USA, 1998.

[10] J. C. Lagarias, S. Szabó, *Universal spectra and Tijdeman's conjecture on factorization of cyclic groups*, J. Fourier Anal. Appl., **7** (2001)(1), 63–70.

[11] J. C. Lagarias, Y. Wang, *Spectral sets and factorizations of finite abelian groups*, J. Funct. Anal., **145** (1997)(1), 73–98.

[12] B. A. Venkov, *On a class of Eulclidean polyhedra*, Vestnik Leningrad Univ. Ser. Math. Fiz. Him. **9** (1954), 11-31 (Russian)

[13] P. McMullen, *Convex bodies which tile space by translation*, Mathematatika **27** (1980), 113-121.