Matematika A4, Valószínűségszámítás
1. zh feladatai és megoldásaik
2009 03 23

Első, 17:15 órai verzó

1. Feldobunk négy szabályos érmét, és leírjuk, hogy hány fejet kapunk. Ezután újból dobunk a négy érmével. a) Mi a valószínűsége annak, hogy a fejek száma ugyanannyi lesz, mint az első dobásnál? b) Ha a fejek számára ugyanazt kapjuk, mi a valószínűsége annak, hogy ez a szám 2?

   Megoldás.

   a) A négy dobásból adódó fejek száma BIN$(4, 0.5)$ eloszlású, így

$$\mathbb{P}(k \text{ fej jön ki}) = \binom{4}{k} 0.5^4 \quad (k = 0, 1, \dots, 4). \qquad \text{(2 pont)}$$

   A teljes valószínűség tétele szerint:

$$\mathbb{P}(\text{ugyanannyi fej jön ki a két négyes dobásnál}) =$$

$$\sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(\text{ugyanannyi fej jön ki a két négyes dobásnál} \mid \text{az elsőnél } k \text{ fej jön ki})\mathbb{P}(\text{az elsőnél } k \text{ fej jön ki}) =$$

$$\sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(\text{a második dobásnál } k \text{ fej jön ki} \mid \text{az elsőnél } k \text{ fej jön ki})\mathbb{P}(\text{az elsőnél } k \text{ fej jön ki}) =$$

$$\sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(\text{a másodiknál } k \text{ fej jön ki})\mathbb{P}(\text{az elsőnél } k \text{ fej jön ki}) =$$

$$\sum_{k=0}^{4} \left(\binom{4}{k} 0.5^4 \right)^2 = \frac{70}{2^8} \approx 0.273 \qquad \text{(4 pont)}$$

   b) A feltételes valószínűség definíciója (1 pont) alapján ez éppen

$$\frac{\mathbb{P}(\text{mindkétszer kettő jön ki})}{\mathbb{P}(\text{ugyanannyi jön ki })} =$$

$$\left(\binom{4}{2} 0.5^4 \right)^2 / \sum_{k=0}^{4} \left(\binom{4}{k} 0.5^4 \right)^2 = \frac{36}{70} \approx 0.514 \qquad \text{(3 pont)}$$

2. Gyakran megyek nagymamámhoz, aki a Cserhátban, egy kis faluban lakik. Hazafelé stoppal szoktam jönni. Mindig számolom, hogy hányadik autó vesz fel. Jelölje ezt a számot X. Az a tapasztalatom, hogy kb. négyszer olyan valószínű az, hogy a második kocsi vesz fel, mint az, hogy csak a negyedik. (Feltételezzük, hogy az elhaladó autók ugyanolyan valószínűséggel vesznek fel, egymástól függetlenül.) a) Adja meg X eloszlásának nevét, képletét és a parméter(ek) numerikus értékét! b) Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke páros szám?

   Megoldás.

   Egy eseményt figyelünk (azt, hogy az aktuálisan mellettünk elhaladó autó felvesz-e minket vagy nem). Erre az eseményre végzünk kísérleteket az első sikeres kimenetelig (ha valaki felvesz minket, utána már nem érdekel, hogy a többi autós mit tenne). Ezt **geometriai eloszlással** modellezzük (0.5 pont). A geometriai eloszlás képlete:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \qquad p \in (0, 1] \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$

   (képlet 1 pont, paraméter értelmezési tartománya és értékkészlet 0.5 pont)

   ahol a p paraméter értéke annak az eseménynek a valószínűségével egyenlő, hogy egy adott kísérlet sikeres lesz (egy adott autó p valószínűséggel vesz fel).

   a) A feladat információi alapján a következő egyenletet írhatjuk

$$\mathbb{P}(X = 2) = 4 \cdot \mathbb{P}(X = 4) \qquad \text{(1 pont)}$$

$$(1 - p)^{2-1} p = 4(1 - p)^{4-1} p$$
$$1 = 4(1 - p)^2$$
$$4p^2 - 8p + 3 = 0$$

(Minden olyan alak, amiből minden a p lehetséges értékei meghatározhatóak 1 pont)

A fenti egyenletet megoldva (vagy bármilyen más módon) azt kapjuk, hogy a p paraméternek két lehetséges értéke van.

$$p_1 = \frac{1}{2} \qquad p_2 = \frac{3}{2}$$

(Ha megvan mind a két megoldás, vagy indoklással eliminálódott az egyik ág 1 pont)

Mivel a geometriai eloszlás paramétere nem lehet egynél nagyobb, ezért a $p = \frac{1}{2}$ megoldást választjuk (a helyes érték megválasztása !indoklással! 1 pont)

b)Annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az X valváltozó páros értéket vesz fel, úgy kapjuk meg, hogy X páros értékeinek valószínűségeit összeadjuk.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2i-1} \frac{1}{2}$$ (Minden értelmes megfogalmazása ennek az összegnek 2 pont)

$$\sum_{1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} = \frac{1}{3}$$

(Geometriai összegre alakítás 1 pont, geometriai összeg eredménye 1 pont)

Megjegyzés:

Nagyon sokan Poisson eloszlással modellezték a valváltozónkat. Ez a modell akkor lett volna helyes, ha pl. úgy döntünk, hogy gyalog megyünk haza Nagyi falujából, és azt számoljuk, hogy hány autós ajánlja fel, hogy felvesz út közben, és igaz lenne, hogy minden autól a többitől függetlenül csak kis valószínűséggel vesz fel..

3. Egy színház aulájában az égőknek csak kb. a fele éli túl az 1 évet. Feltehetjük, hogy az égők élettartama exponenciális eloszlást követ. a) Ha egy izzó túlél 1 évet, akkor mi a valószínűsége annak, hogy túlél még további három évet? b) Ha egy izzó nem él túl 3 évet, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a második évben ég ki?

Megoldás.

Először kiszámoljuk az exponenciális eloszlás paraméterét. Legyen

$$X = \text{az égő élettartalma évben.}$$

$$\mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda 1} = \frac{1}{2}$$

Azaz

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\log(1/2) = \log(2) \qquad \text{(3 pont)}$$

a)

$$\mathbb{P}(X > 4 \mid X > 1) = \frac{\mathbb{P}(X > 4 \text{ és } X > 1)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X > 4)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{1 - (1 - \mathrm{e}^{-4\lambda})}{1 - (1 - \mathrm{e}^{-1\lambda})} = \mathrm{e}^{-3\lambda} = \frac{1}{8} \qquad \text{(3 pont)}$$

Ezt lehetett az örökifjú tulajdonság felhasználásával is.

b)

$$\mathbb{P}(1 < X < 2 \mid X < 3) = \frac{\mathbb{P}(1 < X < 2 \text{ és } X < 3)}{\mathbb{P}(X < 3)} = \frac{\mathbb{P}(1 < X < 2)}{\mathbb{P}(X < 3)} = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}) - (1 - \mathrm{e}^{-1\lambda})}{1 - \mathrm{e}^{-3\lambda}} = \frac{2}{7} \qquad \text{(4 pont)}$$

A feladatokat nem kellett a törtes alakig leegyszerűsíteni. A b) résznél a pontok nagy része akkor is jár, ha a feladatot félreértelmezte (pl. $\mathbb{P}(2 < X < 3 \mid X < 3)$ számolt.)

Második, 19:00 órai verzó

1. Egy városban megfigyelték házaspárok választási szokásait. Annak valószínűsége, hogy egy férj elmegy szavazni, 2/3. Ha egy férj elmegy szavazni, akkor 4/5 valószínűséggel a feleség is elmegy, de ha a férj nem megy el, ettöl még a feleség 1/2 valószínűséggel elmegy. a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy feleség nem megy el szavazni? b) Mi annak a valószínűsége, hogy egy férj elmegy szavazni, ha a feleség nem megy el?

   Megoldás.

   a)

$$\mathbb{P}(\text{feleség nem megy}) \overset{(2\text{ pont})}{=} \mathbb{P}(\text{feleség nem megy} \mid \text{férj elmegy})\mathbb{P}(\text{férj elmegy}) +$$
$$\mathbb{P}(\text{feleség nem megy} \mid \text{férj nem megy})\mathbb{P}(\text{férj nem megy}) \overset{(2\text{ pont})}{=}$$
$$\left(1-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} \overset{(1pont)}{=} \frac{3}{10}$$

   b)

$$\mathbb{P}(\text{férj elmegy} \mid \text{feleség nem megy}) \overset{(2\text{ pont})}{=}$$
$$\frac{\mathbb{P}(\text{a férj elmegy és a feleség nem megy})}{\mathbb{P}(\text{feleség nem megy el})} \overset{(2\text{ pont})}{=} \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}} \overset{(1pont)}{=} \frac{4}{9}$$

2. Egy urnából, amelyben 8 piros és 3 fehér golyó található, 16 -szor húzunk visszatevéssel. Feljegyezzük, hogy hányszor húzzunk fehéret. Jelöljük ezt a számot X-szel. a) Adja meg X eloszlásának nevét, képletét és a parméter(ek) numerikus értékét! b) Mennyi az X várható értéke, és melyik szám az X legvalószínűbb értéke?

   Megoldás.

   Binomiális eloszlás, mert 16 független húzásból számoljuk meg a fehéreket (2 pont). Így $n = 16$, és egy adott húzásnál a fehér valószínűsége $p = \frac{3}{11}$ (1 pont). $X \sim \mathrm{BIN}(16, \frac{3}{11})$ eloszlásának képlete (2 pont):

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{16}{k}\left(\frac{3}{11}\right)^k\left(\frac{8}{11}\right)^{n-k} \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

   A binomiális eloszlás várható értéke: $np = 16\cdot\frac{3}{11} = \frac{48}{11}$. (3 pont)

   A módusza: $\lfloor(n+1)p\rfloor = \lfloor 17\cdot\frac{3}{11}\rfloor = 4$. (2 pont)

3. A távolsági busz, mely Budapestről hozza barátnőmet, elvileg 12 órakor érkezik Balatonakármire. Munkanapokon a késése egyenletes eloszlást követ 0 és fél óra között. Szombaton és vasárnap a (szintén órában mért) késés sűrűségfüggvénye $f(x) = 2 - 2x \quad (0 < x < 1)$. 12-kor kiállok a megállóba. a) Mi a valószínűsége annak, hogy vasárnap 10 percnél többet kell várnom a buszra? b) Nyári szünet van, ötletem sincs, hogy a hét melyik napja van. Mi a valószínűsége annak, hogy 10 percnél többet kell várnom a buszra?

   Megoldás.

   a) Vasárnap van, tehát hétvége. Ennek megfelelően a megadott sűrűségfügvénnyel számolunk. Mivel órákban gondolkodunk, ezért a 10 percet is át kell számolni. Ez 1/6 óra.

$$\mathbb{P}(X>\frac{1}{6}) \overset{(1pont)}{=} 1-\mathbb{P}(X<\frac{1}{6}) \overset{(2pont)}{=} 1-\int_0^{\frac{1}{6}} 2-2x\,\mathrm{d}x \overset{(1pont)}{=} 1-2x\big|_0^{\frac{1}{6}}+x^2\big|_0^{\frac{1}{6}} \overset{(1pont)}{=} 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$
$$=\frac{25}{36}$$

   b)

$$\mathbb{P}\left(X>\frac{1}{6}\right) \overset{(1pont)}{=} 1-\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{6}\right) \overset{(2pont)}{=}$$
$$1-\left(\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{6}\middle|\text{hétköznap}\right)\mathbb{P}(\text{hétköznap})+\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{6}\middle|\text{hétvége}\right)\mathbb{P}(\text{hétvége})\right) \overset{(1pont)}{=}$$
$$1-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}+\left(1-\frac{25}{36}\right)\cdot\frac{2}{7}\right)$$

   Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(X<\frac{1}{6}\middle|\text{hétköznap}\right) \overset{(1pont)}{=} \frac{\frac{1}{6}-0}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$