KJK – matematika a3 **1. zh** **2018. okt. 5.**

1.

a) Határozza meg a következő komplex hatványsor konvergencia-sugarát és középpontját!

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{n^2}}{n^4} \cdot (z+i+2)^n \qquad \text{(6 pont)}$$

b) Konvergens-e az alábbi sor és ha igen, mi az összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i+3}{4}\right)^n \qquad \text{(4 pont)}$$

2.

a) Mely pontokban differenciálható (4 pont) és reguláris (2 pont) az $f(x+iy) = x^4 - y^5 i$ komplex függvény?

b) Adja meg algebrai alakban $(2+2i)^i$ értékét! (4 pont)

3. Legyen $u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 + e^x\cos(y)$. a) Adjon meg egy olyan $v(x,y)$ függvényt, mellyel az $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris és $f(0) = 1$. (8 pont) b) Számítsa ki az $f'(z)$ deriváltat! (2 pont)

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$e^{2z} + 3ie^z + 4 = 0 \qquad \text{(10 pont)}$$

5. Számítsa ki az $\int_G (\overline{z})^{-3}\,\mathrm{d}z$ integrál értékét, ahol G az origó középpontú 4 sugarú $4i$-ből a -4-be menő pozitívan irányított negyedkörív! (10 pont)

6. Számítsa ki az $\oint_H \dfrac{\sin(\pi z)}{(z+3)(z^2-9)}\,\mathrm{d}z$ integrál értékét, ahol H a -4, $-i$, i csúcspontokkal rendelkező pozitívan irányított háromszög. Az eredményt algebrai alakban adja meg! (10 pont)

KJK – matematika a3 **1. zh** **2018. okt. 5.**

1.

a) Határozza meg a következő komplex hatványsor konvergencia-sugarát és középpontját!

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{n^2}}{n^4} \cdot (z+i+2)^n \qquad \text{(6 pont)}$$

b) Konvergens-e az alábbi sor és ha igen, mi az összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i+3}{4}\right)^n \qquad \text{(4 pont)}$$

2.

a) Mely pontokban differenciálható (4 pont) és reguláris (2 pont) az $f(x+iy) = x^4 - y^5 i$ komplex függvény?

b) Adja meg algebrai alakban $(2+2i)^i$ értékét! (4 pont)

3. Legyen $u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 + e^x\cos(y)$. a) Adjon meg egy olyan $v(x,y)$ függvényt, mellyel az $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris és $f(0) = 1$. (8 pont) b) Számítsa ki az $f'(z)$ deriváltat! (2 pont)

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$e^{2z} + 3ie^z + 4 = 0 \qquad \text{(10 pont)}$$

5. Számítsa ki az $\int_G (\overline{z})^{-3}\,\mathrm{d}z$ integrál értékét, ahol G az origó középpontú 4 sugarú $4i$-ből a -4-be menő pozitívan irányított negyedkörív! (10 pont)

6. Számítsa ki az $\oint_H \dfrac{\sin(\pi z)}{(z+3)(z^2-9)}\,\mathrm{d}z$ integrál értékét, ahol H a -4, $-i$, i csúcspontokkal rendelkező pozitívan irányított háromszög. Az eredményt algebrai alakban adja meg! (10 pont)

1. a)

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}}{n^4}\right|}=\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\sqrt[n]{n^4}}=\frac{\left(1+\frac{-3}{n}\right)^n}{(\sqrt[n]{n})^4}\to e^{-3}\rightsquigarrow R=\frac{1}{e^{-3}}=e^3,\ \text{(5 pont)}\qquad z_0=-i-2\ \text{(1 pont)}$$

b)

$$\left|\frac{2i+3}{4}\right|=\frac{\sqrt{4+9}}{4}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{16}}<1\rightsquigarrow(s_n)\ \text{konvergens}$$

(2 pont)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i+3}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{2i+3}{4}}=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$$

(2 pont, nem kell algebrai alakban).

2. a) Az f komponensfüggvényei ($u(x,y)=x^4$, $v(x,y)=-y^5$) folytonosan differenciálhatók az teljes síkon (1 pont). C–R-e.r.:

$$\begin{cases}u'_x=v'_y\\ u'_y=-v'_x\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}4x^3=-5y^4\\ 0=0\end{cases}$$

(2 pont) f differenciálható a $4x^3=-5y^4$ görbe pontjaiban (1 pont) és sehol sem reguláris (2 pont).
b)

$$(2+2i)^i=e^{i\ln(2+2i)}=e^{i(\ln 2\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i+2\pi ik)}=e^{i\ln 2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}-2\pi k}=e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cos(\ln 2\sqrt{2})+ie^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}\sin(\ln 2\sqrt{2})$$

(1-1-1-1 pont).

3. Könnyen ellenőrizhető, hogy u harmonikus (2 pont). Mivel $u(x,y)=4x^2-4y^2+e^x\cos(y)$ ezért

$$v'_x(x,y)=-u'_y(x,y)=8y+e^x\sin(y),$$

így $v(x,y)=8xy+e^x\sin y+C(y)$. Felhasználva, hogy

$$v'_y(x,y)=u'_x(x,y)=8x+e^x\cos y,$$

visszahelyettesítve ide v-t

$$(8xy+e^x\sin y+C(y))'_y=8x+e^x\cos y$$
$$8x+e^x\cos y+C'(y)=8x+e^x\cos y$$
$$C'(y)=0\rightsquigarrow C(y)=c$$

(4 pont) Innen: $f(x+iy)=4x^2-4y^2+e^x\cos(y)+i(8xy+e^x\sin y+c)$ és az $f(0)=1$ feltételből: $1+ic=1$ és $c=0$ (2 pont). Továbbá $f'(x+iy)=u'_x(x,y)+iv'_x(x,y)=8x+e^x\cos y+i(8y+e^x\sin y)$ (2 pont).

4. $e^{2z}+3ie^z+4=0$-ből, a $w=e^z$ új ismeretlen bevezetésével: $w^2+3iw+4=0$, (2 pont) aminek a megoldásai: $w=i$, $w=-4i$ (4 pont). Ezeknek a logaritmusai a megoldások: $z=i\frac{\pi}{2}+2\pi ik$, $k\in\mathbf{Z}$, továbbá $z=\ln 4-i\frac{\pi}{2}+2\pi ik$, $k\in\mathbf{Z}$ (4 pont).

5. Paraméterezésért: 2 pont, a derivált kiszámításáért 2 pont, majd

$$\int_G(\overline{z})^{-3}\,\mathrm{d}z=\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\overline{4e^{it}}\right)^{-3}\cdot i4e^{it}\,dt=\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(4e^{-it}\right)^{-3}\cdot i4e^{it}\,dt=i\cdot 4^{-2}\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{4it}\,dt=$$

(4 pont)

$$=i\cdot 4^{-2}\left[\frac{e^{4it}}{4i}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi}=4^{-3}\left[e^{4\pi i}-e^{2\pi i}\right]=4^{-3}\left[(-1)^4-(-1)^2\right]=0$$

(2 pont) felhasználva, hogy $e^{i\pi}=-1$ (nem kell algebrai alakban).

6. H-n belül a $z=-3$-nál lévő szingularitás van és így a háromszögön belül $\frac{\sin(\pi z)}{z-3}$ reguláris, ezért

$$\oint_H\frac{\sin(\pi z)}{(z+3)^2(z-3)}\,\mathrm{d}z=\oint_H\frac{\frac{\sin(\pi z)}{z-3}}{(z+3)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\left(\frac{\sin(\pi z)}{z-3}\right)'\Bigg|_{z=-3}=2\pi i\cdot\frac{\pi\cos(\pi z)(z-3)-\sin(\pi z)}{(z-3)^2}\Bigg|_{z=-3}=\frac{\pi^2 i}{3}$$