Matematika A3 **3. gyakorlat** **2015. szeptember 25.**

1. (B.24. 68-71.) Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\lim_{z\to i}\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i},\quad \lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^6+1},\quad \lim_{z\to 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16},\quad \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{z\left(z-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)}{z^3+1}.$$

2. (B.24. 75-78.) Adjuk meg az $f(0)$ függvényértéket úgy, hogy az $f(z)$ függvény a $z=0$ pontban folytonos legyen!

$$f(z)=\frac{z\cdot Re\, z}{|z|},\quad f(z)=\frac{z\cdot Im(z^2)}{|z|^2},\quad f(z)=e^{-\frac{1}{|z|}},\quad f(z)=\frac{z}{|z|}.$$

3. (B.24. 81-113.) Vizsgáljuk meg regularitás és differenciálhatóság szempontjából az alábbi komplex függvényeket!

$$f(z)=z^3,\quad f(z)=\bar{z},\quad f(z)=|z|,\quad f(z)=Re\, z,$$
$$f(z)=z\cdot Re\, z,\quad f(z)=z\cdot Im\, z,\quad f(z)=ze^z,\quad f(z)=\bar{z}|z|.$$

4. (B.24. 120-126.)Állapítsuk meg, hogy az alábbi kétváltozós valós függvények lehetnek-e valamely reguláris komplex f függvény valós, illetve valamely komplex g függvény képzetes részei! Ha igen, akkor határozzuk meg ezen függvények deriváltját!

$$u(x,y)=x^2-y^2+2xy,\quad u(x,y)=x^2,\quad u(x,y)=\frac{(1+x^2)y}{2},\quad u(x,y)=3(x^2-y^2)+2y+1,$$
$$u(x,y)=\log(x^2+y^2),\quad u(x,y)=e^{-y}\sin x,\quad u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

5. (B.24. 127-134.) Határozzuk meg azt az $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ értelmezési tartományán reguláris komplex függvényt, amelynek a megadott u, illetve v függvény a valós, ill. képzetes része és a z_0 pontban a megadott $w=f(z_0)$ értéket veszi fel!

$$u(x,y)=e^x\sin y,\ f(0)=i,\quad v(x,y)=2y(x+1),\ f(i)=2i-1,\quad u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ f(\pi)=\frac{1}{\pi},$$
$$u(x,y)=x^2-y^2-5x+y+2,\ f(1)=-2.$$