1. Határozza meg a következő komplex hatványsor konvergencia-sugarát és középpontját!

$$\text{a)}\sum_{n=0}^{\infty} i\cdot n^8\cdot 2^n\cdot(z-2)^n; \quad \text{b)}\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left(\frac{n^2+1}{3n^2+8n+7}\right)^n\cdot(z-5+i)^n; \quad \text{c)}\sum_{n=0}^{\infty} i^n\frac{n!}{(3n)^n}\cdot(z+\sqrt{2}i-2)^n$$

2. **C** mely pontjaiban differenciálható ill. reguláris az alábbi komplex függvény?

$$\text{a)}\ f(z)=(z-i)\cdot\overline{z-i}; \quad \text{b)}\ f(z)=\mathrm{Im}(z^2)+z+2i$$

3. Ha van, adjon meg egy olyan $v(x,y)$ függvényt, mellyel az $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ reguláris és $f(3\pi i)=1-9\pi^2$. Számítsa ki az $f'(z)$ deriváltat! (10 pont)

$$u(x,y)=x^2-y^2+e^{2x}\cos(2y)$$

4. Számítsa ki az $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ függvény integrálját a következő görbére: a 3 pontból a $-3i$ pontba menő $|z|=3$ egyneletű kör íve majd a $-3i$ pontból a -6 pontba menő egyenes mentén.
5. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$\text{a)}\oint_{|z-3i|+|z+3i|=8}\frac{\cos iz}{z^2+9},\mathrm{d}z; \quad \text{b)}\oint_{G_2}\frac{\sin(z)+z^2}{(z-\pi i)(z+3\pi i)^2}+z^2\,\mathrm{d}z; \quad \text{c)}\oint_{|z+i|=2}\frac{e^{iz}}{(z+i)^{99}}+\sin iz^2\,\mathrm{d}z$$

Ahol G_2 a $10i; 10-10i; -10-10i$ csúcspontú háromszög pozitívan irányítva.
6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$\text{a)}\ \sin z=2i \quad \text{b)}\ \cos z=-2i$$

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} i \cdot n^8 \cdot 2^n \cdot (z-2)^n$$

$\sqrt[n]{|i \cdot n^8 \cdot 2^n|} = \sqrt[n]{1 \cdot n^8 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{n^8} \cdot \sqrt[n]{2^n} = \sqrt[n]{n^8} \cdot 2 \to 1 \cdot 2 = 2 = L,\ R = 1/L = \frac{1}{2}$
mert $|i| = 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$, azaz $(\sqrt[n]{n})^8 \to 1$. $z_0 = 2$.

$$\text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(\frac{n^2+1}{3n^2+8n+7}\right)^n \cdot (z-5+i)^n$$

$\sqrt[n]{\left|i^n \left(\frac{n^2+1}{3n^2+8n+7}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{1 \cdot \left(\frac{n^2+1}{3n^2+8n+7}\right)^n} = \frac{n^2+1}{3n^2+8n+7} \to \frac{1}{3} = L,\ R = 1/L = 3$

$|i^n| = |i|^n = 1^n = 1$ és $\frac{n^2+1}{3n^2+8n+7} = \frac{1+1/n^2}{3+8/n+7/n^2} \to \frac{1}{3}$