A3 gyakorló feladatok, 1.
KJK, 2018 ősz

*($^{\mathrm{HF}}$ – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat,* B – *Babcsányi feladatgyűjtemény III.*

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi numerikus sorok konvergensek-e és ha mértani sorok akkor az összegüket is!

$$\left(|q| < 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{C} \ni \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \qquad |q| < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right)$$

$$\text{a)}^{\text{B.22.108}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^n, \quad \text{b)}^{\text{B.22.109}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-i)^n}{2^n}, \quad \text{c)}^{\text{B.22.110}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$$

(* konvergens-e és abszolút konverges-e?)

$$\text{d)}{*}^{\text{B.22.112}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}, \quad \text{e)}{*}^{\text{B.22.107}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \text{f)}{*}^{\text{B.22.113}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$$

2. Mi az alábbi függvénysorok értelmezési tartománya és konvergenciatartománya?

$$\text{a)}^{\text{B.23.16}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z)^n}, \quad \text{b)HF}^{\text{B.23.21}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2}{(1+z^2)^{2n}}$$

3. Mi az alábbi hatványsorok konvergenciakörének középpontja és sugara?

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \right)$$

$$\left(R = \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}, & 0 < \limsup \sqrt[n]{|c_n|} < \infty \\ 0, & \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \\ \infty, & \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \end{cases}, \quad R = \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}, & 0 < \limsup \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < \infty \\ 0, & \limsup \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \infty \\ \infty, & \limsup \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0 \end{cases} \right)$$

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - n^2 + 6)(z-3i)^n, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} (z+i-2)^n, \quad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{3^n}(z+3i)^n, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} z^n$$

$$\text{e)HF}^{\text{B.23.63}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2\, 2^n}, \quad \text{f)HF}^{\text{B.23.76}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n, \quad \text{g)HF}{*}^{\text{B.23.78}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+in}, \quad \text{h)HF}^{\text{B.23.64}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} z^n$$

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$\left(e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \right)$$

$$(\ln z = \ln re^{\varphi} = \ln(r) + i\varphi + i2\pi k)$$

$$\text{a)}\ \sin z = i, \qquad \text{b)HF}\ \cos iz = 2, \qquad \text{c)}\, e^{iz} = \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{d)HF}^{\text{B.24.48}}\ \cos z = -2$$