A3 gyakorló feladatok, 2.
KJK, 2018 ősz

($^{\mathrm{HF}}$ *– javasolt házi feladat,* * *– nem kötelező, gondolkodtató feladat,* B *– Babcsányi feladatgyűjtemény III.*

1.* Létezik-e az alábbi f komplex függvényeknek a z_0 pontban határértéke és ha igen, mennyi az értéke? Folytonosak-e a z_0 pontban?

$$\text{a) } z_0 = 0, \quad f(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Im}(z^2) + i\mathrm{Re}(z)^2}{z \cdot \overline{z}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } z_0 = i, \quad f(z) = e^z$$

$$\left(\exists \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} u(x,y) + iv(x,y) = a + bi \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ és } \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b\right)$$

$$\left(f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}; \quad \exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{C}(z_0)\right)$$

2. Hol differenciálhatók és hol regulárisak az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott mennyi a deriváltjuk?

$$\text{a) } f(z) = z^2, \quad \text{b) } f(z) = \overline{z}, \quad \text{c) } f(z) = z \cdot \overline{z}, \quad \text{d) } f(x+iy) = y^2 + ix^3$$

$$\left(f = u + iv, z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathrm{intDom}(f): \quad f \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{C}}(z_0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u, v \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{R}^2}(x_0, y_0) \\ \begin{cases} \partial_x u(x_0,y_0) = \partial_y v(x_0,y_0) \\ \partial_y u(x_0,y_0) = -\partial_x v(x_0,y_0) \end{cases} \end{cases} \right)$$

$$\left(z_0 \in \mathrm{intDom}(f), w \in \mathbf{C}, \quad \exists f'(z_0) = w \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w \right)$$

3. Mik az alábbi függvények harmonikus társai (ha vannak ilyenek)? Ha van, melyik az a harmonikus társ, amelyikkel a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban $f(x_0+iy_0) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) = w$ teljesül. Mi $f' = (u+iv)'$, ha létezik?

$$\text{a) } u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy, \quad z_0 = 1,\ w = 1 - i, \quad \text{b) } v(x,y) = e^{-y}\sin x, \quad z_0 = \pi, \quad w = -1$$

$$\left(f = u + iv : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \text{ reg.} \ \Rightarrow \partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y) \equiv 0 \text{ és } \partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y) \equiv 0\right)$$

$$\left(u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \partial^2_{xx} u(x,y) + \partial^2_{yy} u(x,y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \exists v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \quad f = u + iv \text{ reg.}\right)$$

4. Adja meg algebrai alakban!

$$\text{a) } (1+i)^i, \quad \text{b) } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{-i} \quad \text{c) } \mathrm{ch}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$$