

A3 gyakorló feladatok, 3.
KJK, 2018 ősz

(^{HF} – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat, B – Babcsányi feladatgyűjtemény III.

1. (Ismétlő feladatok) Hol differenciálható és hol reguláris? Ahol deriválható, ott mennyi a deriváltja?

$$\text{a) } f(x + iy) = y^2 + ix^3, \quad \text{b) } *f(z) = |z|z$$

Adja meg algebrai alakban!

$$\text{c) } (1 + i)^i, \quad \text{d) } \operatorname{ch}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$$

e) Melyik $v(x, y) = e^{-y} \sin x$ azon harmonikus társa, amire $f = u + iv$ reguláris és $f(\pi) = -1$?

2. (v.ö.: B.24.135-137, 140, 141) Számoljuk ki a következő integrálok értékét a megadott görbe mentén!

$$\int_G f = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt, \quad z: [t_1; t_2] \rightarrow \mathbf{C}; t \mapsto z(t), \quad z \in C^1[t_1; t_2], \quad f \in R(U, \mathbf{C}), \quad \operatorname{Ran}(z) = G \subseteq U \subseteq \mathbf{C}$$

$$\text{a) } \int_L (\operatorname{Re}(z))^3 dz; L = [i; 1 + 2i], \quad \text{b) } \int_K |z| \bar{z} dz; \quad K: |z| = 2, \operatorname{Re}(z) \geq 0, \quad \mathbb{Q}$$

$$\text{c) } \int_L i \operatorname{Im}(z) dz; L = [1+i; -1+3i] \frown [-1+3i; -1], \quad \text{d) } \int_G (\bar{z})^3 dz; \quad G = K \frown L; K: |z| = 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0, \quad \mathbb{Q}; L = [i; -i]$$

$$\text{e) } * \int_P \operatorname{Re}(z^2) dz; \quad P: \text{a } 0\text{-ból } 2 + 4i\text{-be menő parabola, ami áthalad az } i \text{ ponton}$$

3. Számoljuk ki a következő integrálok értékét a megadott pontok között! Adjuk meg az eredményeket algebrai alakban!

Ha f -nek van primitív függvénye, ez az F és f integrálható a G görbe mentén, melynek kezdőpontja z_1 , végpontja z_2 , akkor $\int_{z_1}^{z_2} f = F(z_2) - F(z_1)$ (Komplex Newton–Leibniz-tétel).

$$\text{a) } \int_1^i e^{z^2} 2z dz, \quad \text{b) } \int_0^i \sin(z^2 + 4z) \cdot (z + 2) dz$$