

1. a) Adja meg az alábbi hatványsor konvergenciakörének sugarát és középpontját! (6 pont) b) Mennyi az alábbi sor összege, ha van neki? (4 pont)

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} \cdot (z - 2i + 1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + 4i}{6}\right)^n$$

2. Oldja meg a $\sin z = 3i$ egyenletet a komplex számok halmazán! (10 pont)

3. a) Hol differenciálható és hol reguláris az alábbi komplex függvény? (6 pont) b) Differenciálható-e a $z_0 = 0$ pontban az alábbi komplex függvény? (4 pont)

$$f(x + iy) = x^3 - y^2i \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2) \qquad f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z^2)$$

4. Keresse meg az $u = x^2 - y^2 + e^{-y} \cos x$ függvény azon v harmonikus társát, mellyel $f = u + iv$ reguláris és $f(0) = 3i + 1$ teljesül! (10 pont)

5. Számítsa ki az $f(z) = \overline{z}$ függvény integrálját arra a görbére, mely a $|z| = 4$ egyenletű kör $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ egyenlőtlenséget teljesítő pozitívan irányított ívéből, majd az ehhez hozzáfűzött $[-4i; 4]$ irányított egyenes szakaszból áll! (10 pont)

6. Számítsa ki a következő integrált! (10 pont) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z + 2i)(z^2 + 4)} dz$

1. a) Adja meg az alábbi hatványsor konvergenciakörének sugarát és középpontját! (6 pont) b) Mennyi az alábbi sor összege, ha van neki? (4 pont)

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2} \cdot (z - 2i + 1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + 4i}{6}\right)^n$$

2. Oldja meg a $\sin z = 3i$ egyenletet a komplex számok halmazán! (10 pont)

3. a) Hol differenciálható és hol reguláris az alábbi komplex függvény? (6 pont) b) Differenciálható-e a $z_0 = 0$ pontban az alábbi komplex függvény? (4 pont)

$$f(x + iy) = x^3 - y^2i \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2) \qquad f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z^2)$$

4. Keresse meg az $u = x^2 - y^2 + e^{-y} \cos x$ függvény azon v harmonikus társát, mellyel $f = u + iv$ reguláris és $f(0) = 3i + 1$ teljesül! (10 pont)

5. Számítsa ki az $f(z) = \overline{z}$ függvény integrálját arra a görbére, mely a $|z| = 4$ egyenletű kör $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ egyenlőtlenséget teljesítő pozitívan irányított ívéből, majd az ehhez hozzáfűzött $[-4i; 4]$ irányított egyenes szakaszból áll! (10 pont)

6. Számítsa ki a következő integrált! (10 pont) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z + 2i)(z^2 + 4)} dz$

1. a) Közep pont: $z_0 = 2i - 1$.

$$\sqrt[n]{\left|i^n \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}\right|} \underset{2 \text{ pont}}{=} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \rightarrow \underset{3 \text{ pont}}{e^3} \rightsquigarrow \underset{1 \text{ pont}}{R = e^{-3}}$$

b)

$$\left|\frac{3+4i}{6}\right| = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{6} = \frac{5}{6} < 1 \rightsquigarrow \underset{2 \text{ pont}}{\text{konvergens}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{6}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3+4i}{6}} = \frac{6}{3-4i} = \frac{18+24i}{25}$$

2.

$$\sin z = 3i$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3i$$

3 pont

$$e^{iz} - e^{-iz} = -6$$

$$e^{iz} = w$$

$$w^2 + 6w - 1 = 0$$

$$w_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(-1)}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$$

3 pont

$$e^{iz} = -3 + \sqrt{10} \rightsquigarrow e^{iz} = e^{\ln(\sqrt{10}-3)} \rightsquigarrow iz = 2\pi ik + \ln(\sqrt{10}-3) \rightsquigarrow z = 2\pi k - i \ln(\sqrt{10}-3) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$2 \text{ pont. } e^{iz} = -3 - \sqrt{10} \rightsquigarrow e^{iz} = e^{\pi i + \ln(\sqrt{10}+3)} \rightsquigarrow iz = \pi i + \pi ik + \ln(\sqrt{10}+3) \rightsquigarrow z = \pi i - i \ln(\sqrt{10}+3) + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

2 pont.

3. a) $f(x+iy) = x^3 - y^2i \rightsquigarrow u = x^3, v = -y^2$ (1 pont)

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3x^2 = -2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

3 pont. Tehát az $-\frac{3}{2}x^2 = y$ parabola pontjaiban teljesülnek a C-R-egyenletek, és mivel u, v folytonosan differenciálható, ezért ezekben a pontokban f differenciálható. 1 pont. Viszont sehol sem reguláris, mert nincs olyan pont, melynek teljes környezetében f differenciálható lenne. 1 pont.

b) A deriválhatóság definíciója szerint:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re}(z^2) - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re}(z^2)}{z} \underset{2 \text{ pont}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re}(z^2) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 \underset{1 \text{ pont}}{=} 0$$

Tehát a függvény a 0 pontban differenciálható. 1 pont.

4. $u = x^2 - y^2 + e^{-y} \cos x$

$$u'_x = 2x - e^{-y} \sin x \rightsquigarrow u''_{xx} = 2 - e^{-y} \cos x$$

$$u'_y = -2y - e^{-y} \cos x \rightsquigarrow u''_{yy} = -2 + e^{-y} \cos x.$$

$u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$ mindenhol, azaz $\mathbf{C}$ -n van harmonikus társa. 2 pont (ez akkor is megkapható, ha kiderül a megoldásból, hogy van u -nak harmonikus társa)

$$\begin{cases} v'_x = -u'_y \\ v'_y = u'_x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} v'_x = 2y + e^{-y} \cos x \\ v'_y = 2x - e^{-y} \sin x \end{cases} \rightarrow v = 2xy + e^{-y} \sin x + C(y)$$

$$(2xy + e^{-y} \sin x + C(y))'_y = 2x - e^{-y} \sin x$$

$$2x - e^{-y} \sin x + C'(y) = 2x - e^{-y} \sin x$$

$$C(y)' = 0 \rightsquigarrow C(y) = c \quad (c \in \mathbf{R})$$

$v = 2xy + e^{-y} \sin x + c$ -vel $f = u + iv$ reguláris. 5 pont.

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + e^{-y} \cos x + i(2xy + e^{-y} \sin x + c)$$

$$1 + 3i = f(0 + 0i) = 0^2 - 0^2 + e^0 \cos 0 + i(2 \cdot 0 + e^0 \sin 0 + c) = 1 + ci$$

$$c = 3$$

$f(x + iy) = x^2 - y^2 + e^{-y} \cos x + i(2xy + e^{-y} \sin x + 3)$. 3 pont.

5. Az első görbeív paraméterezése: $z(t) = 4e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$ 2 pont

$$\int_{t=\pi}^{2\pi} \overline{4e^{iz}} \cdot 4ie^{it} dt = \int_{\pi}^{2\pi} 4e^{-iz} \cdot 4ie^{it} dt = \int_{\pi}^{2\pi} 16i dt = 16\pi i$$

3 pont.

Az első görbeív paraméterezése: $z(t) = -4i + (4i + 4)t = 4t - 4i + 4ti$, $t \in [0, 1]$ 2 pont.

$$\int_{t=0}^1 \overline{4t - 4i + 4ti} \cdot (4i + 4) dt = \int_0^1 (4t + 4i - 4ti) \cdot (4i + 4) dt =$$

$$= (4i + 4) \int_0^1 4t + 4i - 4ti dt = (4i + 4)[2t^2 - 4it - 2t^2i]_0^1 = (4i + 4)(2 - i - 4i) = 28 - 12i$$

Az integrál: $16\pi i + 28 - 12i = 28 + i(16\pi - 12)$. 3 pont.

6.

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z+2i)(z^2+4)} dz = \oint_{|z|=3} \frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)} dz = \oint_{|z+2i|=0,5} \frac{1}{(z+2i)^2} dz + \oint_{|z-2i|=0,5} \frac{1}{(z-2i)^2} dz =$$

1+2+2 pont, a számlálók regulárisak a körlapokon 1 pont.

$$= \left(\frac{1}{z-2i} \right)' \Big|_{z=-2i} + \frac{1}{(z+2i)^2} \Big|_{z=2i} = -\frac{1}{(z-2i)^2} \Big|_{z=-2i} + \frac{1}{(z+2i)^2} \Big|_{z=2i} = 0$$

4 pont.