KJK – matematika A3k **2. zh** (90 perc) **2018. ápr. 27.**

1. Tekintsük az $y' = (y-1) \cdot y \cdot 3x^2$ differenciálegyenletet! a) Adja meg az *összes* megoldását! (8 pont) b) Adja meg azt az y megoldását, amire a $y(0) = 1$ kezdeti feltétel teljesül! (2 pont) c) Adja meg azt a megoldását, amire az $y(1) = 0$ kezdeti érték feltétel teljesül! (2 pont)

2. Oldja meg az $y^2 \cos x + \operatorname{sh} x + (2y \sin x - 2ye^{y^2} + 3)y' = 0$ egyenletet! (12 pont)

3. Oldja meg az $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$ differenciálegyenletet (8 pont) és adja meg azt a megoldását, melyre az $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel teljesül! (4 pont).

4. Oldja meg az $1 = \dfrac{3y''}{(y')^5}$ differenciálegyenletet! (12 pont)

5. Oldja meg az $x^3y' - y = -1$ differenciálegyenletet (8 pont), adja meg az általános megoldást $y(x) = c \cdot y_1(x) + y_P(x)$ alakban (2 pont) és ha van, adja meg a konstans megoldását (2 pont)!

KJK – matematika A3k **2. zh** (90 perc) **2018. ápr. 27.**

1. Tekintsük az $y' = (y-1) \cdot y \cdot 3x^2$ differenciálegyenletet! a) Adja meg az *összes* megoldását! (8 pont) b) Adja meg azt az y megoldását, amire a $y(0) = 1$ kezdeti feltétel teljesül! (2 pont) c) Adja meg azt a megoldását, amire az $y(1) = 0$ kezdeti érték feltétel teljesül! (2 pont)

2. Oldja meg az $y^2 \cos x + \operatorname{sh} x + (2y \sin x - 2ye^{y^2} + 3)y' = 0$ egyenletet! (12 pont)

3. Oldja meg az $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$ differenciálegyenletet (8 pont) és adja meg azt a megoldását, melyre az $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel teljesül! (4 pont).

4. Oldja meg az $1 = \dfrac{3y''}{(y')^5}$ differenciálegyenletet! (12 pont)

5. Oldja meg az $x^3y' - y = -1$ differenciálegyenletet (8 pont), adja meg az általános megoldást $y(x) = c \cdot y_1(x) + y_P(x)$ alakban (2 pont) és ha van, adja meg a konstans megoldását (2 pont)!

1. MO.: a) $y \equiv 0$ és $y \equiv 1$ konstans megoldások. $\int \frac{dy}{(y-1)y} = \int 3x^2\,dx$. $\frac{1}{(y-1)y} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$, $\ln|y-1| - \ln|y| = x^3 + C$ (implicit általános megoldás). b) $y(0) = 1$-et teljesíti az $y \equiv 1$ és c) az $y(1) = 0$-t teljesíti az $y \equiv 0$ megoldás (ezek egyértelműek).

2. MO.: $P + Qy' = 0$ alakú, ahol $P = y^2\cos x + \operatorname{sh} x$, $Q = 2y\sin x - 2ye^{y^2} + 3$. Könnyen ellenőrizhető, hogy egzakt, azaz $\partial_y P \equiv \partial_x Q$.

$$\begin{cases} \partial_x F = y^2\cos x + \operatorname{sh} x \\ \partial_y F = 2y\sin x - 2ye^{y^2} + 3 \end{cases}$$

$F(x,y) = y^2\sin x + \operatorname{ch} x + C(y) \quad \to \quad \partial_y(y^2\sin x + \operatorname{ch} x + C(y)) = 2y\sin x + C'(y) = 2y\sin x - 2ye^{y^2} + 3$

$$C(y) = \int -2ye^{y^2} + 3\,dy = -e^{y^2} + 3y + k$$

Innen $F(x,y) = y^2\sin x + \operatorname{ch} x - e^{y^2} + 3y + k$, és a megoldás: $y^2\sin x + \operatorname{ch} x - e^{y^2} + 3y = C$.

3. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$, amiből: $\lambda_{1,2} = \;\; -4$; 2 homogén megoldás: $y_H(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}$ Mivel a jobb oldal e^{2x}, ezért külső rezonancia van: $y_P(x) = Axe^{2x}$ alakban fogjuk keresni a megoldást. $y'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$ és $y''(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$. Ekkor:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 8Axe^{2x} = e^{2x}$$

Innen: $6Ae^{2x} = e^{2x}$ és $A = 1/6$. A megoldás tehát: $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{6}xe^{2x}$. A derivált, pl. $y'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$-ből leolvasva: $y'(x) = 2C_1e^{2x} - 4C_2e^{-4x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$. A kezdeti feltételeket behelyettesítve:

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$2C_1 - 4C_2 + \frac{1}{6} = 1$$

$6C_1 = \frac{5}{6}$, $C_1 = \frac{5}{36}$, $C_2 = -\frac{5}{36}$.

4. $1 = \dfrac{3\frac{dp}{dy}p}{p^5}$. Innen:

$$\int 1\,dy = \int \frac{3}{p^4}\,dp$$

$$y = -\frac{1}{p^3} + c$$

$(-y+c)^{-1/3} = p$, $(-y+c)^{-1/3} = y'$, ahonnan: $x = -\frac{3}{4}(-y+c)^{4/3} + d$

5. Szeparálással megoldható: $x^3y' - y = -1 \to x^3y' = y - 1$,

$$\int \frac{dy}{y-1}\,dy = \int x^{-3}\,dx$$

$$\ln|y-1| = -2x^{-2} + C$$

$$y - 1 = e^{-2x^{-2}}c \to y = ce^{-2x^{-2}} + 1$$