1. Véletlenszerűen dobunk egyet egy szabályos dobókockával. Tekintsük a következő eseményeket, mint $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ részhalmazait! P: „a dobott szám prímszám”, N: „A dobott szám kettőnél nagyobb.”, H: „A dobott szám hárommal osztható”. Adjuk meg az alábbi eseményeket, mint Ω részhalmazait (az elemeiknek felsorolásával): (2+2+2+2+2 pont)

a) $P \cdot N \cdot \overline{H}$,
b) $\overline{P + N + H}$,
c) $PN + NH + PH$,
d) $(PN + NH + PH) \cdot \overline{PNH}$,
e) $\overline{\overline{P} + \overline{N}}$.

2. a) Mi annak a valószínűsége, hogy az Á,D,I,K,N,O,R,S,S,S betűk véletlenszerű egymás utáni leírásakor a KISSSÁNDOR karaktersorozatot kapjuk? (4 pont)

b) Legyen (Σ, P) valószínűségi mező és $A, B \in \Sigma$ olyan, hogy $P(A + B) = \frac{3}{4}$ és $P(AB) = \frac{1}{5}$. Mennyi $P(A\overline{B} + B\overline{A} + AB)$ értéke? (6 pont)

3. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ A \cdot (x+2)^2, & -2 \leq x < 0, \\ A \cdot (x-2)^2, & 0 \leq x < 2, \\ 0 & 2 \leq x. \end{cases}$

a) Határozza meg A értékét! (4 pont)
b) Számítsa ki a $P(-1 \leq X \leq 0)$ valószínűséget! (3 pont)
c) Számítsa ki X várható értékét! (3 pont)

4. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval!* (10 pont)

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

5. a) Írja fel az $f(x+iy) = e^{x^2 y} + ixy^2$ függvényre a Cauchy–Riemann-egyenletrendszert! (4 pont)

b) A c (nem feltétlenül pozitív) egész paraméter mely értékére lesz az

$$\oint_K \frac{\sin z}{z^{c+1}}\, dz$$

értéke nulla, ha K a 0 középpontú egységsugarú, pozitívan irányított kör? (6 pont)

6. Milyen alakban kell keresni az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek *partikuláris* megoldását a próbafüggvényes megoldás során? Az egyenleteket NEM kell megoldani! (2+2+2+2+2 pont)

a) $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$,
b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$,
c) $y'' - 4y' + 4y = (x-2)^2$,
d) $y'' + 4y = \sin x$,
e) $y'' + 4y = \sin(2x)$.

1. $P = \{2;3;5\}$, $N = \{3;4;5;6\}$, $H = \{3;6\}$

i. $P \cdot N \cdot \overline{H} = \{5\}$,

ii. $\overline{P+N+H} = \overline{\{2;3;4;5;6\}} = \{1\}$,

iii. $PN + NH + PH = \{3;5\} \cup \{3;6\} \cup \{3\} = \{3;5;6\}$,

iv. $(PN + NH + PH) \cdot \overline{PNH} = \{5;6\}$,

v. $\overline{\overline{P} + \overline{N}} = PN = \{3;5\}$.

2. a) Összes eset száma: 10!, 10 elem sorendjeinek száma. Kedvező esetek száma: 3! (az S-ek többször fordulnak elő). Ekkor

$$p = \frac{3!}{10!}$$

b) $A\overline{B}+B\overline{A}+AB = A(\overline{B}+B)+B\overline{A} = A+B\overline{A} = (A+B)(A+\overline{A}) = A+B$, ezért $P(A\overline{B}+B\overline{A}+AB) = P(A+B) = \frac{3}{4}$.

3. a) $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X = \int\limits_{-2}^{0} A(x+2)^2dx + \int\limits_{0}^{2} A(x-2)^2dx = [A(x+2)^3/3]_{-2}^{0} + [A(x-2)^3/3]_0^2 = 8A/3 - (-8)A/3 = 16A/3$, azaz $A = \frac{3}{16}$.

b) $P(-1 \le X \le 0) = \int\limits_{-1}^{0} f_X = \int\limits_{-1}^{0} \frac{16}{3}(x+2)^2dx = [(3/16)(x+2)^3/3]_{-1}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$

c) $M_X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int\limits_{-2}^{0} \frac{16}{3}(x^3 + 4x^2 + 4x)dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{16}{3}(x^3 - 4x^2 + 4x)dx = 0$ a paritásra és a szimmetriára hivatkozva.

4. $p^2Y - 5pY + 6Y = \frac{1}{p+1} \rightsquigarrow Y(p^2 - 5p + 6) = \frac{1}{p+1} \rightsquigarrow Y = \frac{1}{(p-3)(p-2)(p+1)} = \frac{1/4}{p-3} + \frac{-1/3}{p-2} + \frac{1/12}{p+1} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-t}$

5. a) $u = e^{x^2y}$, $v = xy^2$, $\partial_x u = e^{x^2y}2xy = 2xy = \partial_y v$, $\partial_y u = e^{x^2y}x^2 = -y^2 = -\partial_x v$

b) Ha $c < 0$, akkor az integrandus reguláris, ezért a Cauchy-tétel miatt az integrálja 0. A $z = 0$ az egyetlen szingularitása az integrandusnak a K-n belül, ha $c \ge 0$. A c-edik deriváltra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulával: $\oint\limits_K \frac{\sin z}{z^{c+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{c!}\sin^{(c)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } c \text{ páros} \\ \text{nem nulla}, & \text{ha } c \text{ páratlan} \end{cases}$, mert $\sin^{(n)} = (-1)^{n/2}\sin$, ha n páros és $\sin^{(n)} = (-1)^{(n-1)/2}\cos$, ha n páratlan pozitív egész szám.

6.

i. $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x} = e^{ax} \rightsquigarrow Ae^{-2x}$, mert $\lambda = 2 \ne -2 = a$,

ii. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} = e^{ax} \rightsquigarrow Ax^2e^{2x}$, mert $\lambda = 2 = a$,

iii. $y'' - 4y' + 4y = (x-2)^2 \rightsquigarrow Ax^2 + Bx + C$,

iv. $y'' + 4y = \sin x = \sin(bx) \rightsquigarrow A\sin x + B\cos x$, mert $\lambda = \alpha \pm \beta i = \pm 2i$, $b = 1 \ne 2 = \beta$,

v. $y'' + 4y = \sin(2x) = \sin(bx) \rightsquigarrow x(A\sin 2x + B\cos 2x)$, mert $\lambda = \alpha \pm \beta i = \pm 2i$, $b = 2 = \beta$.