1. Véletlenszerűen húzunk egy lapot egy francia kártyapakli *treffjei* közül. Tekintsük a következő eseményeket, mint $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; J; Q; K; A\}$ részhalmazait! ($\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ elemeit *számos* lapoknak, $\{J; Q; K; A\}$ elemeit *figurás* lapoknak nevezzük.) A: „A húzott lap számos és 5-nél nagyobb.”, B: „A húzott lap figurás.”, C: „A húzott lap vagy figurás vagy páratlan számos.”. Adjuk meg az alábbi eseményeket, mint Ω részhalmazait (az elemeiknek felsorolásával): (2+2+2+2+2 pont)

a) $ABC + AB\overline{C}$,
b) $\overline{AB}$,
c) $AB + BC + CA$,
d) $\overline{A + B + C}$,
e) $\overline{\overline{B} + \overline{C}}$.

2. a) Feltéve, hogy páratlan számjeggyel kezdődik egy ötjegyű szám mi a valószínűsége, hogy tartalmaz páros számjegyet? (6 pont)

b) Legyen (Σ, P) valószínűségi mező, $A, B, C \in \Sigma$ események. Igazolja, hogy ha A és C *független* eseménypár, B és C is *független* eseménypár és A és B egymást kizárja, akkor $A + B$ és C is független eseménypár. (4 pont)

3. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A \cdot \dfrac{x}{4}, & 0 \le x < A, \\ 0 & A \le x. \end{cases}$

a) Határozza meg A értékét! (4 pont)
b) Számítsa ki a $P(0 \le X \le 1)$ valószínűséget! (3 pont)
c) Számítsa ki X várható értékét! (3 pont)

4. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval!* (10 pont)

$$y'' + 2y' + y = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

5. a) Van-e harmonikus társa az $u(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$ függvénynek? (4 pont)

b) A w komplex paraméter mely értékére lesz a

$$\oint_K \frac{\sin\left((w^2 + 1) \cdot z\right)}{z^2}\, dz$$

értéke nulla, ha K a 0 középpontú egységsugarú, pozitívan irányított kör? (6 pont)

6. Milyen alakban kell keresni az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek *partikuláris* megoldását a próbafüggvényes megoldás során? Az egyenleteket NEM kell megoldani! (2+2+2+2+2 pont)

a) $y'' - 3y' + 2y = e^{-2x}$,
b) $y'' - 3y' + 2y = \sin 2x$,
c) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$,
d) $y'' - 3y' + 2y = x$,
e) $y'' - 3y' + 2y = x^2$.

1. $A=\{6;7;8;9;10\}$, $B=\{J;Q;K;A\}$, $C=\{3;5;7;9;J;Q;K;A\}$

a.) $ABC+AB\overline{C}=AB=\emptyset$,

b.) $\overline{AB}=\Omega$,

c.) $AB+BC+CA=\{7;9;J;Q;K;A\}$,

d.) $\overline{A+B+C}=\{2;4\}$,

e.) $\overline{\overline{B}+\overline{C}}=BC=\{J;Q;K;A\}$.

2. a) Összes eset száma: $5\cdot 10^4$, egy helyre 5 páratlan és 4 helyre 10 bármilyen számjegy. Kedvező esetek száma: összes minusz csupa páratlan, azaz $5\cdot 10^4-5^5$. Ekkor

$$p=\frac{5\cdot 10^4-5^5}{5\cdot 10^4}$$

b)

$$P((A+B)C)=P(AC+BC)\underset{A\cap B=\emptyset}{=}P(AC)+P(BC)\underset{\text{fgtln.}}{=}P(A)P(C)+P(B)P(C)=(P(A)+P(B))P(C)=P(A+B)P(C)$$

3. a) $1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X=\int\limits_{0}^{A} Ax/4\,dx=[Ax^2/8]_0^A=A^3/8$, azaz $A=2$.

b) $P(0\le X\le 1)=\int\limits_0^1 f_X=\int\limits_0^1 x/2dx=[x^2/4]_0^1=\frac{1}{4}$.

c) $M_X=\frac{4}{3}$, a háromszög súlypontjának x koordinátájára hivatkozva.

4. $p^2Y+2pY+Y=\frac{1}{p-2}\rightsquigarrow Y(p^2+2p+1)=\frac{1}{p-2}\rightsquigarrow Y=\frac{1}{(p-2)(p+1)^2}=\frac{1/9}{p-2}+\frac{-1/9}{p+1}+\frac{-1/3}{(p+1)^2}\rightsquigarrow y(t)=\frac{1}{9}e^{2t}-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{1}{3}te^{-t}$

5. a) Igen, mert ez az e^{-2z} függvény valós része.

b) Az 1. deriváltra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulával: $\oint\limits_K \frac{\sin((w^2+1)z)}{z^2}\,dz=\frac{2\pi i}{1!}\sin((w^2+1)z)'|_0=2\pi i(w^2+1)$, ami pontosan akkor nulla, ha $w=\pm i$.

6.

a.) $y''-3y'+2y=e^{-2x}=e^{ax}\rightsquigarrow Ae^{-2x}$, mert $\lambda=1;\ 2\neq -2=a$,

b.) $y''-3y'+2y=\sin(2x)=\sin(bx)\rightsquigarrow A\sin 2x+B\cos 2x$, mert $\lambda=1; 2\neq \pm bi=\pm 2i$,

c.) $y''-3y'+2y=e^x=e^{ax}\rightsquigarrow Axe^x$, mert $\lambda_1=1=a$

d.) $y''-3y'+2y=x\rightsquigarrow Ax+B$,

e.) $y''-3y'+2y=x^2\rightsquigarrow Ax^2+Bx+C$.