1. Tekintsük a következő eseményeket A: „Anna ötöst kapott matekból.”, B: „Balázs ötöst kapott matekból.”, C: „Cili ötöst kapott matekból.”. Fogalmazzuk meg szavakban, ekvivalens módon a következő eseményeket: (2+2+2+2+2 pont)

a) $(A+B+C)\cdot\overline{ABC}$,
b) $(A+B+C)\cdot\overline{A+B}\cdot\overline{B+C}\cdot\overline{A+C}$,
c) $(ABC)+\overline{A+B+C}$,
d) $\overline{\overline{A+B}+\overline{B+C}+\overline{A+C}}$,
e) $\overline{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}$.

2. a) Egy dobozban 12 cetlin 12 különböző szám van. Miután találomra mind kihúztuk őket, mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok éppen növekvő sorrendben vannak? (6 pont)

b) Legyen (Σ, P) valószínűségi mező, $A, B \in \Sigma$ események. Igazolja, hogy ha A és B *független* eseménypár, akkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is *független.* (4 pont)

3. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases}$

a) Határozza meg X várható értékét! (4 pont)
b) Számítsa ki a $P(0 \leq X \leq 2)$ valószínűséget! (3 pont)
c) Mi az $Y = 2X$ valószínűségi változó $y \mapsto F_Y(y)$ eloszlásfüggvénye? (3 pont)

4. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval!* (10 pont)

$$y'' + 4y = \sin(\sqrt{3}\cdot t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

5. a) Oldja meg az $e^z = 1$ egyenletet a komplex számok halmazán! (6 pont)

b) Egy háromszög csúcspontjai a komplex síkon: $z_1 = i$, $z_2 = -i$ és $z_3 = 2$. Az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ reguláris függvény integrálja az $[z_1; z_2]$ oldalszakaszon $6i - 2$, a $[z_2; z_3]$ oldalszakaszon $2i + 4$. Mennyi az f függvény integrálja a $[z_3; z_1]$ oldalszakaszon? (4 pont)

6. Osztályozza *közönséges/parciális*, *lineáris/nemlineáris*, *hanyadrendű* szempontokból az alábbi differenciálegyenleteket! (4+3+3 pont)

a.) $u'_x = u^2 + \sin(xy)$,

b.) $x^2y'' + \sin(x)y = e^x$,

c.) $y'y = \cos(x)$.

1.

a.) Legalább az egyik, de nem mindhárom.

b.) $(A+B+C)\cdot\overline{A+B}\cdot\overline{B+C}\cdot\overline{A+C}=(A+B+C)\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{C}\cdot\overline{A}=\emptyset$ Valaki, de senki. (Lehetetlen esemény.)

c.) Vagy mindhárom, vagy egyik se.

d.) $\overline{\overline{A+B}+\overline{B+C}+\overline{A+C}}=(A+B)(B+C)(C+A)$. Bármely kettő közül legalább egy. Legalább kettő.

e.) $\overline{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}=ABC$. Mindhárom.

2. a) Összes eset száma: 12!. Egyetlen jó sorrend van.

$$p=\frac{1}{12!}$$

b)

$$P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=P\left(\overline{A+B}\right)=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=$$

$$=1-P(A)-P(B)(1-P(A))=(1-P(A))(1-P(B))=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)$$

3. a) $f(x)\underset{\text{m.m.}}{=}F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0\le x<1,.\\ 0, & 1\le x.\end{cases}$

Innen $M_X=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,dx=\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$

b) $P(0\le X\le 2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_X=\int\limits_0^1 f_X=\int\limits_0^1 1\,dx=1.$

c) $F_Y(y)=P(Y<y)=P(2X<y)=P(X<\frac{y}{2})=F_X(\frac{y}{2})=\begin{cases}0, & \frac{y}{2}<0,\\ \frac{y}{2}, & 0\le\frac{y}{2}<1,\\ 1, & 1\le\frac{y}{2}.\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{y}{2}, & 0\le y<2,\\ 1, & 2\le y.\end{cases}$

Hiszen az $x=y/2$ helyettesítést kell alkalmazni.

4. $p^2Y+4Y=\frac{1}{p^2+3}\rightsquigarrow Y(p^2+4)=\frac{\sqrt{3}}{p^2+3}\rightsquigarrow Y=\frac{\sqrt{3}}{(p^2+3)(p^2+4)}$ Innen $x=p^2$ helyettesítéssel: $\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$, azaz $Y=\frac{\sqrt{3}}{p^2+3}-\sqrt{3}\frac{1}{p^2+4}=\frac{\sqrt{3}}{p^2+3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{p^2+4}$, ahonnan $y=\sin(\sqrt{3}t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t)$

5. a) $e^z=1$, $z=\ln_{\mathbf{C}}1=\ln r+i\varphi+2\pi ik=\ln 1+i\cdot 0+2\pi ik=2\pi ik$, $k\in\mathbf{Z}$.

b) Alkalmazva a Cauchy-féle integráltételt a $[z_1;z_2;z_3;z_1]$ zárt görbére és a reguláris f függyvére: $\int\limits_{[z_1;z_2]}f+\int\limits_{[z_2;z_3]}f+\int\limits_{[z_3;z_1]}f=0$, így az f integrálja a $[z_3;z_1]$ szakaszra $\int\limits_{[z_3;z_1]}f=-\int\limits_{[z_1;z_2]}f-\int\limits_{[z_2;z_3]}f=-8i-2$.

6.

a.) $u'_x\rightsquigarrow$ parciális, az ismeretlen függvény magasabb hatványa, u^2 szerepel $\rightsquigarrow$ nemlineáris, első derivált $\rightsquigarrow$ elsőrendű,

b.) nincs parciális der. $\rightsquigarrow$ közönséges, y,y',y'' első fokon, függvény ehókkal $\rightsquigarrow$ lineáris, második derivált függvény $\rightsquigarrow$ másodrendű,

c.) nincs parciális der. $\rightsquigarrow$ közönséges, y' szorzója az y ismeretlen függvény $\rightsquigarrow$ nemlineáris, első derivált $\rightsquigarrow$ elsőrendű.