1. a) Fogalmazza meg szavakban, hogy mit jelentenek az alábbi események, ha A: „Pisti kezd”, B: „Anna kezd”, C: „Imi kezd”. (8 pont)

$$\text{(i.) } A\cdot B\cdot \overline{C}, \quad \text{(ii.) } \overline{A+B+C}, \quad \text{(iii.) } AB+BC+AC, \quad \text{(iv.) } (AB+BC+AC)\cdot\overline{ABC}$$

b) Bizonyítsa be, hogy ha P és Q események, akkor $\overline{P}+\overline{Q}=\overline{P}\cdot Q+P\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot\overline{Q}$. (4 pont)

MO.: a) (i.) Pisti és Anna kezd, de Imi nem. (ii.) Egyik se kezd. (iii.) Legalább kettő kezd. (iv.) Ketten kezdenek, de nem hárman.
b)

$$\overline{P}\cdot Q+P\cdot\overline{Q}+\overline{P}\cdot\overline{Q}=\overline{P}\cdot(Q+\overline{Q})+P\cdot\overline{Q}=\overline{P}+P\cdot\overline{Q}=(\overline{P}+P)\cdot(\overline{P}+\overline{Q})=\overline{P}+\overline{Q}$$

2. a) Egy 52 lapos francia kártyapakliból találomra kihúzunk öt lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy ezek között legalább kettő dáma lesz? (Egy pakliban pontosan négy dáma van. 1-1 mondatban indokolja a választ!) (4 pont)

b) Mennyi $P(A)$, ha $P\left(\overline{A}+B\right)=\frac{7}{8}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, és A és $\overline{B}$ független események? (8 pont)

MO.: a) Összes eset száma: $\binom{52}{5}$, mert 52 lapból választunk ki bármilyen módon 5 lapot. Kedvező esetek száma (egymást kizáró lehetőségek) $\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}$ (vagy komplementerrel: $\binom{52}{5}-\binom{4}{0}\cdot\binom{48}{5}-\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{4}$), mert a 4 dáma közül 2 db vagy 3 db vagy 4 db kell, hogy a kiválasztottak között szerepeljen (a többi rendre 3 nemdáma, 2 nemdáma, 1 nemdáma). Ekkor

$$p=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

b)

$$\frac{7}{8}=P\left(\overline{A}+B\right)=1-P\left(\overline{\overline{A}+B}\right)=1-P\left(A\cdot\overline{B}\right)=1-P(A)\cdot P(\overline{B})=1-P(A)\frac{1}{2}$$

$$P(A)=\frac{1}{4}$$

3. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ A\cdot(x+3), & -3\le x<0\\ -A\cdot(x-3), & 0\le x<3\\ 0 & 3\le x\end{cases}$$

a) Határozza meg A értékét! (6 pont)
b) Számítsa ki a $P(-2\le X\le 0)$ valószínűséget! (2 pont)
c) Számítsa ki X várható értékét! (4 pont)

MO.: a) $1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X=\int\limits_{-3}^{0} A(x+3)dx+\int\limits_{0}^{3}-A(x-3)dx=[A(x+3)^2/2]_{-3}^{0}+[A(x-3)^2/2]_0^3=9A$, azaz $A=\frac{1}{9}$.
b) $P(-2\le X\le 0)=\int\limits_{-2}^{0} f_X=\int\limits_{-2}^{0}\frac{1}{9}(x+3)dx=[(x+3)^2/18]_{-2}^{0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9}$ **vagy** az eloszlásfüggvény felírásával:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ \frac{1}{18}\cdot(x+3)^2\ (=\int\limits_{-3}^{x}\frac{1}{9}(x'+3)dx'), & -3\le x<0\\ 1-\frac{1}{18}\cdot(x-3)^2\ (=\frac{1}{2}+\int\limits_{0}^{x}-\frac{1}{9}(x'-3)dx'), & 0\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

$P(-2\le X\le 0)=F_X(0)-F_X(-2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9}$
c) $M_X=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx=\int\limits_{-3}^{0}\frac{1}{9}(x^2+3x)dx+\int\limits_{0}^{3}-\frac{1}{9}(x^2-3x)dx=[(x^3/3+3x^2/2)/9]_{-3}^{0}+[-(x^3/3-3x^2/2)/9]_0^3=0$ (vagy hivatkozva a paritásra és a szimmetriára).

4. Oldja meg az $y''+4y'+3y=e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval* (12 pont)

MO.: $p^2Y+4pY+3Y=\frac{1}{p-2}\rightsquigarrow Y(p^2+4p+3)=\frac{1}{p-2}\rightsquigarrow Y=\frac{1}{(p+3)(p+1)(p-2)}$, mert p^2+4p+3 gyöktényezős alakban: $(p+1)(p+2)$, hiszen a gyökei: $p=-1$, $p=-3$. Innen parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(p+3)(p+1)(p-2)}=\frac{A}{p+3}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-2}=\frac{A(p+1)(p-2)+B(p+3)(p-2)+C(p+3)(p+1)}{(p+3)(p+1)(p-2)}$$

$$1 = A(p+1)(p-2) + B(p+3)(p-2) + C(p+3)(p+1)$$

A nevező gyökei: $p=-1$, $p=2$, $p=3$ És gyökmódszerrel: $p=-1$ helyettesítéssel az előbbi egyenletben: $1 = B\cdot(-6)$, a $p=2$ helyettesítéssel: $1 = C\cdot 15$, és $p=-3$ helyettesítéssel: $1 = A(-10)$. Ebből

$$\frac{1}{(p+3)(p+1)(p-2)} = \frac{1/10}{p+3} + \frac{-1/6}{p+1} + \frac{1/15}{p-2} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{10}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{15}e^{2t}$$

5. a) Írja fel az $f(x+iy) = \sin(xy^2) + ixy$ függvény Cauchy–Riemann-egyenletrendszerét! (6 pont)

b) Milyen alakban kell keresni az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldását a megoldás során? (6 pont) (i.) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$, (ii.) $y'' + 2y' + y = e^{3x}$.

MO.: a) $u = \sin(xy^2),\ v = xy,\ \partial_x u = y^2\cos(xy^2) = x = \partial_y v,\ \partial_y u = 2yx\cos(xy^2) = -y = -\partial_x v$

b) A homogén lineáris $y'' + 2y' + y = 0$ karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, aminek $\lambda = -1$ kétszeres gyöke (belső rezonancia van), azaz a homogén megoldása: $C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$, ezért:

i. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \rightsquigarrow y_p(x) = Ax^2e^{-x}$, mert külső rezonancia is van,

ii. $y'' + 2y' + y = e^{3x} \rightsquigarrow y_p(x) = Ae^{3x}$, mert nincs külső rezonancia,