1. a) Egy dobókockával dobunk és az események: A: „párost dobtunk", B: „prímszámot dobtunk", C: „háromnál nagyobbat dobtunk". Adja meg az alábbi eseményeket az $\{1,2,3,4,5,6\}$ részhalmazaként és számítsa ki a valószínűségüket! (8 pont)

$$\text{(i.) } A\cdot B\cdot\overline{C},\quad \text{(ii.) } \overline{A+B+C},\quad \text{(iii.) } AB+BC+AC,\quad \text{(iv.) } (AB+BC+AC)\cdot\overline{ABC}$$

b) Írja föl P, Q, $\overline{P}$ ill. $\overline{Q}$ szorzatainak összegeként $\overline{(\overline{P}\cdot Q)+P}$-t, ha P, Q események! (4 pont)

MO.: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{2,4,6\}$, $B=\{2,3,5,\}$, $C=\{4,5,6\}$ a) (i.) $P(A\cdot B\cdot\overline{C})=P(\{2\})=\frac{1}{6}$. (ii.) $P(\overline{A+B+C})=P(\{1\})=\frac{1}{6}$. (iii.) $P(AB+BC+AC)=P(\{2,4,5,6\})=\frac{2}{3}$. (iv.) $P((AB+BC+AC)\cdot\overline{ABC})=P(\{2,4,5,6\})=\frac{2}{3}$.
b)

$$\overline{(\overline{P}\cdot Q)+P}=\overline{(\overline{P}+P)\cdot(Q+P)}=\overline{Q+P}=\overline{Q}\cdot\overline{P}$$

vagy

$$\overline{(\overline{P}\cdot Q)+P}=\overline{\overline{P}\cdot Q}\cdot\overline{P}=(\overline{\overline{P}}+\overline{Q})\cdot\overline{P}=(P+\overline{Q})\cdot\overline{P}=P\cdot\overline{P}+\overline{Q}\cdot\overline{P}=\overline{Q}\cdot\overline{P}$$

2. a) Felírunk véletlenszerűen egy négyjegyű számot. Mi annak a valószínűsége, hogy az első számjegye 1 és a számjegyei között lesz 3-as? (6 pont)

b) Mennyi $P(\overline{A})$, ha $P(A+B)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, és A és B egymást kizáró események? (6 pont)

MO.: a) Összes eset száma: $9\cdot10^3$. Kedvező esetek száma: az első számjegy az 1 és a másik háromból legalább egy hármas, ez a két választás független, a másodikat pl. komplementer módszerrel: $1\cdot(10^3-9^3)$. Vagy egymást kizáró esetekre bontva: $1\cdot9\cdot9+9\cdot1\cdot9+9\cdot9\cdot1+1\cdot1\cdot9+1\cdot9\cdot1+9\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1$. Ekkor

$$p=\frac{10^3-9^3}{9\cdot10^3}\left(=\frac{3\cdot81+3\cdot9+1}{9\cdot10^3}\right)$$

b)

$$\frac{3}{5}=P(A+B)=P(A)+P(B)=P(A)+\frac{1}{2}$$

$$P(A)=\frac{1}{10},\quad P(\overline{A})=\frac{9}{10}$$

3. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 3A\cdot(x+2)^2, & -2\le x<0\\ 3A\cdot(x-2)^2, & 0\le x<2\\ 0 & 2\le x\end{cases}$$

a) Határozza meg A értékét! (6 pont)
b) Számítsa ki a $P(0\le X\le 1)$ valószínűséget! (2 pont)
c) Számítsa ki X várható értékét! (4 pont)

MO.: a) $1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_X=\int\limits_{-2}^{0}3A(x+2)^2dx+\int\limits_{0}^{2}3A(x-2)^2dx=[3A(x+2)^3/3]_{-2}^{0}+[3A(x-2)^3/3]_0^2=16A$, azaz $A=\frac{1}{16}$.
b) $P(0\le X\le1)=\int\limits_0^1 f_X=\int\limits_0^1\frac{3}{16}(x-2)^2dx=[(x-2)^3/16]_0^1=-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$.
c) $M_X=0$ a paritásra és a szimmetriára hivatkozva.

4. Oldja meg az $y''+9y=t$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$ kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval* (12 pont)

MO.: $p^2Y-p-3+9Y=\frac{1}{p^2}\rightsquigarrow Y(p^2+9)=p+3+\frac{1}{p^2}\rightsquigarrow Y=\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{p^2+9}+\frac{1}{p^2(p^2+9)}$ Az utolsó tagot kell parciális törtekre bontani, pl. a tanult ügyes módon (vagy az $x=p^2$ helyettesítéssel A,B-s módszerrel):

$$\frac{1}{p^2(p^2+9)}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+9}\right)$$

Innen

$$Y(p)=\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{p^2+9}-\frac{1}{9}\frac{1}{p^2+9}+\frac{1}{9}\frac{1}{p^2}=\frac{p}{p^2+9}+\frac{26}{27}\frac{3}{p^2+9}+\frac{1}{9}\frac{1}{p^2}$$

$$y(t)=\cos3t+\frac{26}{27}\sin3t+\frac{1}{9}t$$

5. a) A következő komplex integrálok közül melyik nulla értékű? (i.) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3}\,dz$, (ii.) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz$, (iii.) $\oint\limits_{|z|=1} z^3\,dz$ (6 pont)

b) Mennyi legyen az a és a b paraméter értéke, hogy az $xy^3 + xy + (ax^2y^2 + bx^2)y' = 0$ egyenlet egzakt legyen? (6 pont)

MO.: a) (i.) A komplex Newton–Leibniz-tétellel, mivel $\left(-\frac{1}{2z^2}\right)' = \frac{1}{z^3}$ és a görbe zárt, (és a függvény folytonos a görbe egy nyílt környezetében) ezért: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3}\,dz = \left(-\frac{1}{2z^2}\right)\Big|_{z=1} - \left(-\frac{1}{2z^2}\right)\Big|_{z=1} = 0$. (ii.) Jól ismert: $2\pi i \neq 0$, de mindkettő Cauchy-formulával is kiszámítható. (iii.) Mindenhol reguláris az integrandus ezért a Cauchy-tétel értelmében az integrálja nulla.

b) Az egzaktság feltétele (a triviálisan teljesülő folyt. diff. és egyszeres összefüggőségen kívül): $\partial_x(ax^2y^2 + bx^2) = 2axy^2 + 2bx \equiv 3xy^2 + x = \partial_y(xy^3 + xy)$, innen $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.