1. a) Legyen A: „Aladárnak szülinapja van”, B: „Borinak szülinapja van”, C: „Cilinek szülinapja van” események. Fogalmazza meg szavakban az alábbi eseményeket:

$$\text{(i.) } B+\left(\overline{B}\cdot C\right), \quad \text{(ii.) } \overline{A+B\cdot\overline{C}}, \quad \text{(iii.) } A\cdot(B+C)\cdot\overline{BC}, \quad \text{(iv.) } \overline{ABC} \quad \text{(6 pont)}$$

b) Írja föl P, Q, $\overline{P}$ ill. $\overline{Q}$ szorzatainak összegeként $\overline{\left(P\cdot\overline{Q}\right)+\overline{P}}$-t, ha P, Q események! (6 pont)

MO.: a) (i.) Borinak van vagy, Borinak nincs, de Cilinek van szülinapja. (ii.) $\overline{A+B\cdot\overline{C}} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ miatt egyiknek nincs. (iii.) Aladárnak van, és vagy Borinak vagy Cilinek, de nem mindkettőnek van szülinapja. (iv.) Nincs mindháromnak egyszerre szülinapja.

b)

$$\overline{(P\cdot\overline{Q})+\overline{P}} = \overline{(P+\overline{P})\cdot(\overline{Q}+\overline{P})} = \overline{\overline{Q}+\overline{P}} = Q\cdot P$$

2. a) Tizenkétszer feldobunk egymás után egy dobókockát. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a tizenkét dobásból pontosan három (azaz se több, se kevesebb) dobás hatos! (6 pont)

b) Mennyi $P\left(\overline{A}\right)$, ha $P\left(A+B\right)=\frac{4}{7}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, és A és B egymást kizáró események? (6 pont)

MO.: a) Összes eset száma: 6^{12}. Kedvező esetek száma: azoknak az eseteknek a száma, melyekben az első három hatos a többi nem hatos: $1^3\cdot 5^9$. Ilyen elrendezésből (3 db hatos, 9 db nem-hatos) van $\binom{12}{3}$ db egymást páronként kizáró lehetőség, melyek elemszáma mind ugyanannyi, azaz ezek összes száma: $\binom{12}{3}\cdot 5^9$. Így:

$$p=\frac{\binom{12}{3}\cdot 5^9}{6^{12}}$$

b)

$$\frac{4}{7}=P\left(A+B\right)=P(A)+P(B)=P(A)+\frac{1}{3} \rightsquigarrow P(A)=\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\frac{5}{21}$$

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=\frac{16}{21}$$

3. Legyen az alábbi az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ahol A pozitív szám:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x, & 0\le x<A\\ 0, & A\le x\end{cases}$$

a) Határozza meg A értékét! (4 pont)
b) Számítsa ki az F_X eloszlásfüggvényt! (4 pont)
c) Számítsa ki X várható értékét! (4 pont)

MO.: a) $1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X = \int\limits_0^A 2x\,dx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_0^A = 2\frac{A^2}{2}$, azaz $A=1$.

b) Mivel $f_X(x)=F_X'(x)$, olyan x-ekben, ahol f_X folytonos, ezért

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2 \left(=\int\limits_0^x 2x'\,dx'\right), & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$$

c) $M_X=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int\limits_0^1 2x^2\,dx = \left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

4. Oldja meg az $y''+4y'+3y=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval* (12 pont)

MO.: $p^2Y+4pY+3Y=\frac{1}{p} \rightsquigarrow Y(p^2+4p+3)=\frac{1}{p} \rightsquigarrow Y=\frac{1}{p(p+1)(p+3)}$. Parciális törtekre bontva, pl. a tanult ügyes módon (vagy az A,B-s módszerrel):

$$\frac{1}{p}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{p(p+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{p(p+3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{6}\frac{1}{p}+\frac{1}{6}\frac{1}{p+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{p+3}$$

Innen

$$y(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}$$

5. a) Írja fel az alábbi f komplex függvényt $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ alakban, ahol u, v valós függvények és írja fel az f Cauchy–Riemann-egyenleteit! (6 pont)

$$f(z) = z^2$$

b) Írja fel az $x^4y' - y = 6$ inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását $y = y_H + y_P$ alakban, ahol y_H a homogén egyenlet általános megoldása, y_P pedig egy partikuláris megoldása. (6 pont)

MO.: a) $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. $\partial_x u = 2x = 2x = \partial_y v$, $\partial_y u = -2y = -2y = -\partial_x v$. Vagy $0 = 0$, mert mindenhol reguláris.

b) Szeparálva: $y = -6$ konstans megoldás. $\int \frac{1}{y+6}\, dy = \int \frac{1}{x^4}\, dx \rightsquigarrow \ln|y+6| = -x^{-3}/3 + C \rightsquigarrow y = -6 + ce^{-\frac{x^{-3}}{3}}$.