

1. Véletlenszerűen húzunk egy lapot a Pikk Ász, Pikk Hetes, Kőr Király, Káró Hetes, Káró Ötös, Treff Dáma, Treff Hetes lapok közül, azaz legyen az elemi események halmaza:

$$\Omega = \left\{ \boxed{\spadesuit A}, \boxed{\spadesuit 7}, \boxed{\heartsuit K}, \boxed{\diamondsuit 7}, \boxed{\diamondsuit 5}, \boxed{\clubsuit Q}, \boxed{\clubsuit 7} \right\}.$$

P : „a húzott lap Pikk (\spadesuit)”, K : „a húzott lap király (K)”, H : „a húzott lap hetes (7)”.

Felsorolással megadva mik a következő események és mennyi a valószínűségük? (3+3+4 pont)

- $P \cdot \overline{K} \cdot \overline{H}$,
- $\overline{P + K + H}$,
- $(PK + KH + PH) \cdot \overline{PKH}$.

2. a) Mi annak a valószínűsége, hogy az A,A,B,B,D,O,Y,Y véletlenszerű egymás után írásakor a BABYYODA karaktersorozatot kapjuk? (4 pont)

b) Legyen (Σ, P) valószínűségi mező és $A, B \in \Sigma$ olyan, hogy $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ és A független B -től. Mennyi $P(A\overline{B} + B\overline{A} + AB)$ értéke? (6 pont)

3. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{3}{8} \cdot (x+2)^2, & -2 \leq x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$

- Határozza meg az $x \mapsto F_X(x)$ eloszlásfüggvényt! (4 pont)
- Számítsa ki a $P(-1 \leq X \leq 0)$ valószínűséget! (3 pont)
- Számítsa ki X várható értékét! (3 pont)

4. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval!* (10 pont)

$$y'' - 6y' + 5y = 4e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

5. a) Írja fel az $f(x + iy) = \sin(xy) + ixy^3$ függvényre a Cauchy–Riemann-egyenletrendszer! (4 pont)

b) Mennyi az

$$\oint_K \frac{1}{z^3 + 2iz^2} dz$$

komplex integrál értéke, ha K a 0 középpontú egységsugarú, pozitívan irányított kör? (6 pont)

6. Milyen alakban kell keresni az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek *partikuláris* megoldását a próbafüggvényes megoldás során? Az egyenleteket NEM kell megoldani! (2+2+2+2+2 pont)

- $y'' - 6y' + 5y = e^{2x}$,
- $y'' - 6y' + 5y = e^x$,
- $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}$,
- $y'' - 6y' + 5y = x$,
- $y'' - 6y' + 5y = \cos(5x)$.

$$1. P = \{\boxed{\spadesuit A}, \boxed{\spadesuit 7}\}, K = \{\boxed{\heartsuit K}\}, H = \{\boxed{\spadesuit 7}, \boxed{\diamondsuit 7}, \boxed{\clubsuit 7}\}$$

$$i. P \cdot \overline{K} \cdot \overline{H} = \{\boxed{\spadesuit A}\}, p = \frac{1}{7}$$

$$ii. \overline{P + K + H} = \overline{P} \cdot \overline{K} \cdot \overline{H} = \{\boxed{\diamondsuit 5}, \boxed{\clubsuit Q}\}, p = \frac{2}{7}$$

$$iii. (PK + KH + PH) \cdot \overline{PNH} = \{\boxed{\spadesuit 7}\}, p = \frac{1}{7}$$

2. a) Összes eset száma: $8!$, 8 elem sorrendjeinek száma. Kedvező esetek száma: $2!2!2!$ (az A-k, B-k, Y-ok kétszer fordulnak elő). Ekkor

$$p = \frac{2!2!2!}{10!}$$

$$b) \overline{AB} + \overline{BA} + AB = A(\overline{B} + B) + B\overline{A} = A + B\overline{A} = (A+B)(A+\overline{A}) = A+B, \text{ ezért } P(\overline{AB} + \overline{BA} + AB) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6}.$$

$$3. a) F_X(x) = \frac{1}{8} \cdot (x+2)^3, \text{ ha } -2 \leq x < 0, 0, \text{ ha } x < -2 \text{ és } 1, \text{ ha } x \geq 0.$$

$$b) P(-1 \leq X \leq 0) = \frac{1}{8} \cdot (x+2)^3 \Big|_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$c) M_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-2}^0 \frac{3}{8} \cdot x(x+2)^2 dx = \int_{-2}^0 \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} dx = -1/2.$$

$$4. p^2 Y - 6pY + 5Y = \frac{4}{p+1} \rightsquigarrow Y(p^2 - 6p + 5) = \frac{4}{p+1} \rightsquigarrow Y = \frac{4}{(p-5)(p-1)(p+1)} = 1/6 \frac{1}{-5+p} - 1/2 \frac{1}{-1+p} + 1/3 \frac{1}{1+p} \rightsquigarrow y(t) = \frac{1}{6} e^{5t} - \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{3} e^{-t}$$

$$5. a) y \cos(xy) = 3xy^2, x \cos(xy) = -y^3$$

b)

$$\oint_K \frac{1}{z^3 + 2iz^2} dz = \oint_K \frac{1}{z+2i} \frac{1}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \frac{-1}{(2i+z)^2} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{1!} \frac{-1}{-4} = \frac{\pi i}{2}$$

K-n belül $\frac{1}{z+2i}$ reg.

$$6. a) y'' - 6y' + 5y = e^{2x}: Ae^{2x}, b) y'' - 6y' + 5y = e^x: Axe^x, c) y'' - 6y' + 5y = e^{5x}, Axe^{5x}, d) y'' - 6y' + 5y = x, Ax + B, e) y'' - 6y' + 5y = \cos(5x): A \sin(5x) + B \cos(5x).$$