1. Egy dobókockával dobunk, azaz legyen az elemi események halmaza:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,.$$

P: „a dobott szám prímszám”, K: „a dobott szám kettővel osztható”, H: „a dobott szám hárommal osztható”.
Felsorolással megadva mik a következő események és mennyi a valószínűségük? (3+3+4 pont)

a) $P \cdot \overline{K} \cdot \overline{H}$,
b) $\overline{P + K + H}$,
c) $(PK + KH + PH) \cdot \overline{PKH}$.

2. Mi annak a valószínűsége, hogy egy random hatjegyű szám a 2 és a 3 egész számok közül legalább az egyikkel osztható? (10 pont)

3. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -A, \\ x + A, & -A \le x < A, \\ 1, & x \ge A, \end{cases}$

a) Határozza meg az $A > 0$ szám értékét! (4 pont)
b) Számítsa ki a $P(-1 \le X \le 1)$ valószínűséget! (2 pont)
c) Számítsa ki az $Y = 2X$ valószínűségi változó várható értékét! (4 pont)

4. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatot *Laplace-transzformációval!* (10 pont)

$$y'' + 4y = \sin(\sqrt{3}\,t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

5.1. Számítsa ki az

$$\int\limits_K \frac{e^{z^2}}{(z - 2R)^2}\,dz$$

integrált, ahol K az origó középpontú $R > 0$ sugarú pozitívan irányított kör! (4 pont)

5.2. Hol differenciálható komplex értelemben az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}; z \mapsto z \cdot \overline{z}$ függvény, ahol $\overline{(\dots)}$ a komplex konjugálást jelöli? (6 pont)

6.1. Van-e az $y' = y$ differenciálegyenletnek olyan $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ megoldása, amelyre $y(2020) = 0$? Ha igen, hány ilyen megoldása van? (Válaszát indokolja!)
(2+4 pont)

6.2. Mi az $y'' - 5y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása? Milyen alakban keressük az $y'' - 5y' + 4y = xe^x$, differenciálegyenlet inhomogén partikuláris megoldását? (Az inhomogén egyenletet nem kell megoldani.) (2+2 pont)

1. $P = \{2,3,5\}$, $K = \{2,4,6\}$, $H = \{3,6\}$

i. $P \cdot \overline{K} \cdot \overline{H} = \{2,3,5\} \cap \{1,3,5\} \cap \{1,2,4,5\} = \{5\}$, $p = \frac{1}{6}$

ii. $\overline{P + K + H} = \{1\}$, $p = \frac{1}{6}$

iii. $(PK + KH + PH) \cdot \overline{PNH} = (PK + KH + PH) \cdot \Omega = PK + KH + PH = \{2,3,6\}$, $p = \frac{1}{2}$

2. Összes eset száma: $9{\cdot}10^5$. Kedvező esetek száma: $(9{\cdot}10^5/2)+(9{\cdot}10^5/3)-(9{\cdot}10^5/6) = 450.000+300.000-150.000 = 600.000$

$$p = \frac{600.000}{900.000} = \frac{2}{3}.$$

3. a) $f_X(x) = 1$, ha $-A \le x < A$, 0, ha $x < -A$ vagy ha $x \ge A$. Innen $A = \frac{1}{2}$.
b) $P(-1 \le X \le 1) = F(1) - F(-1) = 1 - 0 = 1$.
c) $M_Y = 0$, mert f_Y páros, ahogy f_X is.

4. $p^2Y + 4Y = \frac{\sqrt{3}}{p^2+3} \rightsquigarrow Y = \frac{\sqrt{3}}{(p^2+4)(p^2+3)} = \frac{\sqrt{3}}{p^2+3} - \frac{\sqrt{3}}{p^2+4} \rightsquigarrow y(t) = \sin(\sqrt{3}\,t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t$

5.1. 0 a Cauchy-féle integráltétel miatt, mert az egyetlen szingularitás $2R$-ben van, ami a körlapnak külső pontja, így a körlap egy nyílt befedésén az integrandus reguláris.

5.2. 0-ban differenciálható, mert $\lim\limits_{z\to 0} \overline{z} = 0$. 0-n kívül nem differenciálható, mert a C–R egyenletekkel: $f(z) = x^2 + y^2 + 0 \cdot i$, így $2x = 0$ és $2y = -0$, ami csak 0-ban teljesül.

6.1. A konstans nulla megoldás, ez megfelel a kezdeti feltételnek. Egyébként az egyenlet lineáris, és megoldása: $y = ce^x$, ami csak akkor tud nulla lenni, ha $c = 0$, ami a konstans nulla megoldás.

6.2. A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{1,2} = 1; 4$, a homogén megoldása: $C_1e^x + C_2e^{4x}$. Az inhomogén egy megoldását az $x(Ax + B)e^x$ alakban keressük, mert külső rezonancia van.